Könyvtára

АКАДЕМИЯ НАУК СССР

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

Том VI
11

1961

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР

Главный редактор В. А. КОТЕЛЬНИКОВ

Заместители гл. редактора: Д. В. ЗЕРНОВ, Ю. Б. КОБЗАРЕВ

Редакционная коллегия:

А. И. БЕРГ, Б. А. ВВЕДЕНСКИЙ, И. С. ГОНОРОВСКИЙ, В. Л. ГРАНОВСКИЙ, Н. Д. ДЕВЯТКОВ, Л. Н. ДОБРЕЦОВ, Л. А. ЖЕКУЛИН, А. Н. КАЗАНЦЕВ, С. Г. КАЛАШНИКОВ, П. Л. КАПИЦА, В. В. МИГУЛИН, А. Л. МИКАЭЛЯН, А. А. ПИСТОЛЬКОРС, А. М. ПРОХОРОВ, С. М. РЫТОВ, В. И. СИФОРОВ, Я. Н. ФЕЛЬД, С. Э. ХАЙКИН, Б. М. ЦАРЕВ

Ученый секретарь редакции Г. А. БЕРНАШЕВСКИЙ

MTA. Számtechn. Könyvtára
Leltározva
1962 év 482 sz.

РАДИОТЕХНИКА
И
ЭЛЕКТРОНИКА

MTA Villamosipari Műszaki Könyvtára

Том VI НОЯБРЬ, 1961 Вып. 11

СОДЕРЖАНИЕ

Воронцов Ю. И., Ржевкин К. С. Туннельные диоды в усилительных схемах (обзор) 1779
Радченко А. Н., Мирончиков Е. Т. Многотактные методы исправления одиночных и многократных близко расположенных ошибок в групповых кодах 1805
Ахманов С. А., Хохлов Р. В. О преобразовании случайных сигналов в нелинейных линиях 1813
Литвиненко О. Н. Синтез неоднородных линий по входному сопротивлению, заданному в виде дробно-рациональной функции частоты 1825
Перепелятник П. А. Бигармонические колебания в автогенераторе с запаздыванием при асинхронном соотношении частот 1832
Руткас А. Г. О цепочечном синтезе реактивного многополюсника 1839
Шифрин Я. С. Корреляционные характеристики поля линейной антенны . . . 1846
Хаскинд М. Д. Дифракция волн на щели и ленте, ориентированных перпендикулярно к импедансной плоскости 1859
Любимов Л. А., Веселов Г. И., Бей Н. А. Диэлектрический волновод эллиптического сечения 1871
Шевчик В. Н., Синицын Н. И. Влияние разброса скоростей электронов на работу лампы обратной волны 1881
Иванова В. Д., Михалевский В. С. Плазменное управление частотой генератора типа лампы бегущей волны 1888
Биргер Л. А. Полоса пропускания и коэффициент шума резонансного усилителя на туннельном диоде 1894
Тригубенко В. А., Царев Б. М. О термоэлектронных свойствах гексаборидов и других соединений типа структур внедрения 1900
Резголь И. А. Оптимальные рабочие точки на вольтамперной характеристике термоэлектронного преобразователя энергии 1906
Яблонский Ф. М. Токовое управление зажиганием разряда в декатроне . . . 1914
Белова Н. А., Ковалев А. Н. Некоторые особенности вольтамперной характеристики узких германиевых p—n-переходов 1921
Лотоцкий Л. С. Сопоставление статических и динамических характеристик германиевых диодов при отрицательном смещении 1927

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

Просин А. В. Переходные шумы при двухлучевом распространении радиоволн 1932
Шустерович А. Н. Об одном случае определения статистических характеристик фазы лампового автогенератора, находящегося под воздействием эдс малой амплитуды 1936
Артеменков Л. И., Галкин И. В. Высокочастотное вращающееся поле в цилиндрическом резонаторе 1939
Корнилов С. А., Лавров В. М. Измерение мощности амплитудных флуктуаций отражательного клистрона 1941
Молоковский С. И. Условие получения минимальных пульсаций электронных потоков, фокусируемых однородным магнитным полем, в системах с частично экранированным катодом 1943

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

Кононов В. Г. Накопление шумов в накопителе с задержанной обратной связью 1944

Адрес редакции: Москва, К-9, Моховая, 11, Институт радиотехники и электроники, редакция журнала «Радиотехника и электроника»

Технический редактор *Т. А. Аверкиева*

Т-11828 Подписано к печати 19/X 1961 г. Тираж 5985 экз. Заказ 2298
Формат бум. 70×108¹/₁₆. Печ. л. 14,38. Бум. л. 5,25. Уч.-изд. листов 15,4

2-я типография Издательства Академии наук СССР. Москва, Шубинский пер., 10

1961 № 11

ТУННЕЛЬНЫЕ ДИОДЫ В УСИЛИТЕЛЬНЫХ СХЕМАХ (ОБЗОР)

Ю. И. Воронцов, К. С. Ржевкин

Изложены основные теоретические и экспериментальные результаты исследований усилительных, частотных, шумовых и нелинейных свойств усилителей на туннельных диодах.

Приведено описание наиболее типичных конструкций усилителей для различных диапазонов частот. Изложены некоторые соображения о перспективах дальнейшего развития усилителей на туннельных диодах.

ВВЕДЕНИЕ

Три года назад в работе Езаки [1] появилось первое сообщение о создании нового полупроводникового прибора — туннельного диода.

За истекшее с тех пор время опубликовано много работ, посвященных исследованию туннельного эффекта в p — n-переходах [2—6] и вопросам, связанным с применением туннельных диодов в различных радиотехнических схемах [7—10, 50, 51].

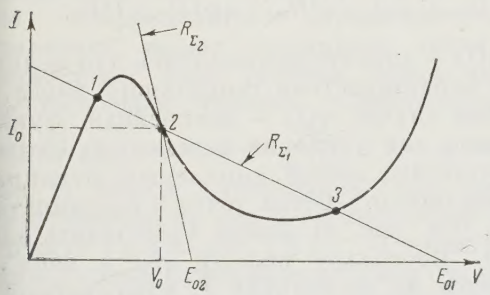


Рис. 1. Вольтамперная характеристика туннельного диода

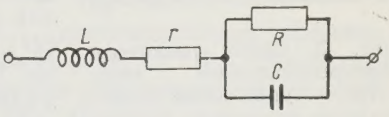


Рис. 2. Эквивалентная схема туннельного диода для переменных сигналов

Как известно, туннельный диод представляет собой узкий p — n-переход, обладающий падающим участком на прямой ветви вольтамперной характеристики (рис. 1) и большой проводимостью в обратном направлении. Эти свойства прибора связаны с квантовым механизмом проникновения электронов через потенциальный барьер p — n-перехода за счет туннельного эффекта. К положительным качествам туннельного диода относятся его высокочастотность, широкий температурный диапазон, малые габариты, слабая чувствительность к воздействию ядерной радиации и малое потребление энергии [6]. Предельная частота туннельного диода определяется величинами паразитной емкости C p — n-перехода, дифференциального сопротивления R в рабочей точке и сопротивлением потерь r (эквивалентная схема туннельного диода показана на рис. 2). Поэтому частотные свойства туннельного диода в значительной степени ограничиваются только технологическими трудностями производства, связанными с уменьшением указанных параметров. Сам же механизм проводимости в принципе не должен зависеть от частоты вплоть до 10^{13} *гц* [11].

В настоящее время уже имеются туннельные диоды, предельная частота которых достигает сотни гигагерц ($\lambda = 0{,}3$ *см*) [12].

Указанные свойства туннельного диода позволяют широко использовать его в различных радиотехнических устройствах. Из всего многообразия применений одним из наиболее перспективных направлений является использование туннельного диода в качестве усилительного элемента в УКВ- и СВЧ-диапазонах. Это связано с тем, что усилители на туннельных диодах имеют сравнительно низкий уровень шумов (2—5 *дб*), простую конструкцию и не требуют генератора накачки.

Учитывая большой интерес, который в последнее время проявляется к усилителям на туннельных диодах, ниже сделана попытка систематически осветить вопросы, связанные с принципом действия подобных систем, оценить достигнутые результаты и перспективы дальнейшего развития.

Приведенные в статье сведения основаны на данных, заимствованных из опубликованных работ, а также на результатах исследований, выполненных авторами.

1. УСИЛИТЕЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ТУННЕЛЬНОГО ДИОДА

Как всякий элемент, обладающий падающим участком вольтамперной характеристики, туннельный диод способен усиливать и генерировать электрические колебания.

Усилительные свойства такого элемента легче всего пояснить на примере работы простейшей схемы, изображенной на рис. 3. Для нее можно записать следующее очевидное соотношение:

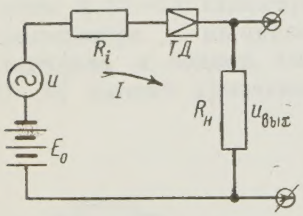


Рис. 3. Схема усилителя последовательного типа (*ТД* — туннельный диод)

$$I(u_г + E_0) = I^2R_н + I\varphi(I) + I^2R_i,$$

где $V = \varphi(I)$ — аналитическая запись для вольтамперной характеристики туннельного диода.

В общем случае $\varphi(I)$ — нелинейная функция. Однако для усиления переменных сигналов с достаточно малой амплитудой функцию $\varphi(I)$ в окрестности рабочей точки с координатами I_0, V_0 (см. рис. 1) можно представить как линейную. Поскольку полный ток в цепи I складывается из постоянной I_0 и переменной i составляющих, то уравнение для баланса энергии в схеме рис. 3 после усреднения за период примет вид

$$I_0E_0 + \overline{iu_г} = I_0^2R_н + \overline{i^2}R_н + I_0\varphi(I_0) + \overline{i^2}\varphi'(I_0) + I_0^2R_i + \overline{i^2}R_i,$$

где $\varphi'(I_0)$ — дифференциальное сопротивление туннельного диода в рабочей точке; $I_0\varphi(I_0) + \overline{i^2}\varphi'(I_0)$ — полная мощность, рассеиваемая в туннельном диоде.

Поскольку при линейном приближении наличие переменной составляющей сигнала не может влиять на величину постоянного тока I_0, то мощность постоянного тока $I_0\varphi(I_0)$, рассеиваемая в туннельном диоде, в процессе работы остается постоянной. Поэтому если рабочая точка выбрана на падающем участке вольтамперной характеристики (см. рис. 1), т. е. $\varphi'(I_0) < 0$, то при наличии переменной составляющей полная мощность, рассеиваемая в диоде, будет уменьшаться на величину $\overline{i^2}\varphi'(I_0)$. Эта мощность естественно распределяется между нагрузкой и генератором.

Проведенные расчеты показывают, каким образом элемент с отрицательным дифференциальным сопротивлением может преобразовать энергию источника постоянного тока в энергию переменного сигнала.

Рассмотренная схема (рис. 3) является простейшим усилителем электрических колебаний на туннельном диоде. Как было показано, режим усиления в этой схеме возможен только в том случае, если рабочая точка

находится на падающем участке характеристики. Эта точка будет устойчивой только при определенных соотношениях между параметрами эквивалентной схемы усилителя, изображенной на рис. 4. Схема рис. 4 получена из рис. 3 заменой туннельного диода его эквивалентной схемой согласно рис. 2. Сопротивление R_Σ и индуктивность L_1 соответствуют результирующему активному сопротивлению и суммарной индуктивности туннельного диода и схемы.

Вопросы устойчивости в схемах, содержащих элементы с падающим участком характеристики, подробно исследованы в работе [13]. Устойчивости усилителей на туннельных диодах посвящено много работ [14, 15], сущность которых сводится к следующему.

Исходным соотношением для определения условий устойчивости является характеристическое уравнение, которое для эквивалентной схемы усилителя, представленной на рис. 4, имеет следующий вид:

$$L_1 C\lambda^2 + \left[R_\Sigma C + \frac{L_1}{\varphi'(I_0)}\right]\lambda + \left[1 + \frac{R_\Sigma}{\varphi'(I_0)}\right] = 0,$$

где $$R_\Sigma = R_i + R_н + r.$$

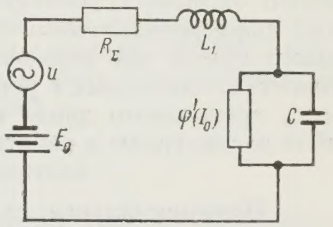


Рис. 4. Высокочастотная эквивалентная схема усилителя последовательного типа

Согласно критерию Рауса — Гурвица схема, описываемая дифференциальным уравнением второго порядка с действительными коэффициентами, будет устойчивой, если все коэффициенты характеристического уравнения имеют одинаковые знаки. Следовательно, если рабочая точка выбрана на падающем участке характеристики, т. е. $\varphi'(I_0) < 0$ и $R_{\Sigma 1} > |\varphi'(I_0)|$, то $1 + \frac{R_{\Sigma 1}}{\varphi'(I_0)} < 0$ и положение равновесия (точка *2* на рис. 1) всегда неустойчиво, так как $L_1 C$ — положительная величина. Этому случаю на рис. 1 соответствует прямая $V = E_0 - IR_{\Sigma 1}$. Поскольку в точках *1* и *3* на рис. 1 $\varphi'(I) > 0$, то эти положения равновесия всегда устойчивы и схема будет находиться в одном из них. Переход схемы из одного положения равновесия в другое может произойти только под действием внешнего сигнала. Как известно, такой режим осуществляется в импульсных схемах.

Другой режим работы, который должен выполняться в схемах усилителей, соответствует случаю $\varphi'(I_0) < 0$ и $R_{\Sigma 2} < |\varphi'(I_0)|$. Тогда

$$1 + \frac{R_{\Sigma 2}}{\varphi'(I)} > 0$$

и положение равновесия в точке I_0, V_0 будет устойчивым только при условии

$$R_{\Sigma 2} C + \frac{L_1}{\varphi'(I_0)} > 0, \text{ т. е. } L_1 < R_{\Sigma 2} |\varphi'(I_0)| C.$$

Если величина индуктивности L_1 не удовлетворяет последнему неравенству, то схема окажется генератором незатухающих колебаний.

Таким образом, при выборе параметров схемы усилителей на туннельных диодах необходимо удовлетворить двум условиям:

$$L_1 < R_\Sigma |R| C, \tag{1}$$

$$R_\Sigma < |R|,$$

где $$R = \varphi'(I_0).$$

Эти условия в зависимости от типа схемы усилителя и способа включения нагрузки могут существенно меняться, но характерным является то обстоятельство, что эквивалентное сопротивление (нагрузка и потери), пересчитанное параллельно туннельному диоду, должно быть всегда меньше модуля дифференциального сопротивления туннельного диода в рабочей точке.

В реальных схемах усилителей на туннельных диодах цепи переменного и постоянного токов, как правило, разделены. Несмотря на это, условия устойчивости в одинаковой степени должны выполняться во всех цепях. Это требование вносит определенную специфику в конструкцию цепей смещения.

Методы задания рабочей точки в усилителях на туннельных диодах весьма разнообразны. Выбор источника смещения и способ его включения зависят от многих условий: типа схемы, диапазона рабочих частот, величины дифференциального сопротивления в рабочей точке и др. В рамках нашего обзора нет возможности подробно останавливаться на всех особенностях, связанных с решением этого вопроса. Различные схемы включения туннельного диода в цепь источника постоянного смещения подробно рассмотрены в работе [16].

Принципиальные схемы усилителей на туннельных диодах

Поскольку туннельный диод является двухполюсником, то для усилителей на таких диодах приобретает особое значение определение коэффициента усиления по мощности.

Обычно в радиотехнике коэффициентом усиления по мощности называют отношение мощности сигнала, выделяемой в нагрузке, к мощности сигнала, развиваемой генератором во входной цепи данного усилительного элемента. Это так называемый передаточный коэффициент усиления по мощности. Поскольку у туннельного диода нельзя разделить вход и выход, приведенное определение коэффициента усиления для усилителей на туннельных диодах неприменимо.

Кроме передаточного часто используется так называемый номинальный коэффициент усиления, определяемый как отношение мощности сигнала, выделяемой в нагрузке усилителя, к мощности, которую может отдать данный генератор сигнала в согласованную нагрузку.

В конкретной схеме входное сопротивление усилительного элемента может быть не согласовано с внутренним сопротивлением генератора, поэтому номинальный коэффициент усиления характеризует усилительные свойства всей схемы в целом (генератор, усилитель, нагрузка) с учетом потерь на рассогласование. Поскольку такое определение коэффициента усиления не требует знания мощности на входе активного элемента, оно пригодно и для усилителей на туннельных диодах.

Кроме номинального коэффициента усиления при описании усилителей часто пользуются коэффициентом, определяемым как отношение мощности сигнала, выделяемой в нагрузке при включенном туннельном диоде, к мощности в той же нагрузке при выключенном диоде. Этот коэффициент называют коэффициентом вносимого усиления [14].

Коэффициент вносимого усиления характеризует величину мощности, «вносимую» в схему при включении в нее туннельного диода, что и определяет его название. Коэффициент вносимого усиления отличается от номинального только тем, что при определении номинального коэффициента усиления под входной мощностью понималась величина $u_г^2/4R_i$, в то время как при определении коэффициента вносимого усиления —

$$\left(\frac{u_г}{R_i + R_н}\right)^2 R_н.$$

Следовательно, номинальный коэффициент усиления K отличается от коэффициента вносимого усиления $K_в$ в

$$\frac{K}{K_в} = \frac{4R_i R_н}{(R_i + R_н)^2} = N \text{ раз.}$$

При $R_i = R_н$ $N = 1$, в остальных случаях $N < 1$. Таким образом, при известных R_i и $R_н$ по известному $K_в$ можно однозначно определить K, и наоборот. В литературе по усилителям на туннельных диодах используются оба определения коэффициента усиления. Так, например, в работе [17] использован номинальный коэффициент усиления, а в работе [14] — коэффициент вносимого усиления.

В схемах усилителей туннельный диод может быть включен как параллельно нагрузке, так и последовательно с ней [6]. В соответствии с этим существуют два типа схем усилителей на туннельных диодах: параллельная и последовательная. Выбор той или иной схемы зависит от частотных и усилительных свойств, а также от конструктивных особенностей, которые начинают играть существенную роль при создании усилителей, работающих в диапазонах УКВ и СВЧ.

Параллельная схема усилителя

Легко показать, что для параллельной схемы (рис. 5) коэффициент вносимого усиления равен

$$K_в = \left| \frac{\frac{1}{R_п}}{\frac{1}{R_п} + \frac{1}{Z_д}} \right|^2, \tag{2}$$

где

$$\frac{1}{R_п} = \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_н},$$

а

$$Z_д = r - \frac{R}{1 + (\omega RC)^2} + j\left[\omega L - \frac{\omega R^2 C}{1 + (\omega RC)^2}\right], \tag{3}$$

$Z_д$ — комплексное сопротивление туннельного диода (согласно схеме рис. 2). Если в (2) подставить выражение (3), то получим

$$K_в = \frac{1}{1 + \dfrac{R_п^2 [1 + (\omega RC)^2] + 2R_п \{[1 + (\omega RC)^2] r - R\}}{rR\left(\dfrac{\omega}{\omega_д'}\right)^2 \left[\left(\dfrac{\omega_д'}{\omega_0}\right)^2 - 1\right]^2 + \left[r - R\left(1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)\right]^2}}, \tag{4}$$

где

$$\omega_д' = \frac{1}{RC}\sqrt{\frac{R}{r}}; \quad \omega_0^2 = \frac{1}{LC}.$$

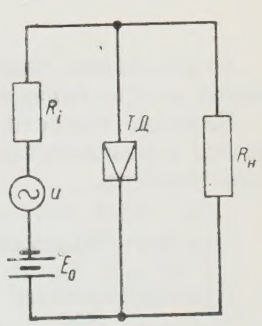


Рис. 5. Схема усилителя параллельного типа

При $r \ll R$ $\omega_д'$ будет совпадать с частотой $\omega_д = \frac{1}{RC}\sqrt{\frac{R}{r} - 1}$, определяемой из условия $\operatorname{Re} Z_д(\omega) = 0$; $\omega_д$ называется предельной частотой туннельного диода [6], поскольку на более высоких частотах действительная часть сопротивления туннельного диода становится положительной, т. е. диод теряет свойства элемента с отрицательным сопротивлением.

Согласно (4) на частотах $\omega \ll \omega_0$, учитывая, что $r \ll R$, получим

$$K_{\text{в}} = \frac{1}{\frac{1}{K_{\text{в0}}} + \frac{R_{\text{п}}^2}{rR}\left(\frac{\omega}{\omega_{\text{д}}}\right)^2}, \tag{5}$$

где

$$K_{\text{в0}} = \frac{1}{\left(1 - \frac{R_{\text{п}}}{R - r}\right)^2}. \tag{6}$$

Важным параметром усилителя является полоса усиливаемых частот, определяемая по заданному коэффициенту неравномерности частотной характеристики $\gamma = K_{\text{в}}/K_{\text{в0}}$. Из выражений (5) и (6) следует, что частота ω_γ, соответствующая определенному значению γ, равна

$$\omega_\gamma = \frac{\sqrt{\frac{1}{\gamma} - 1}}{\sqrt{K_{\text{в0}}}\, R_{\text{п}} C}.$$

Согласно (6)

$$R_{\text{п}} = \frac{\sqrt{K_{\text{в0}}} - 1}{\sqrt{K_{\text{в0}}}} R; \tag{6а}$$

тогда

$$\omega_\gamma = \frac{\sqrt{\frac{1}{\gamma} - 1}}{\sqrt{K_{\text{в0}}} - 1} \frac{1}{RC}.$$

В частности, при $\gamma = 1/2$

$$\omega_\gamma \left(\sqrt{K_{\text{в0}}} - 1\right) = \frac{1}{RC}.$$

Интересно отметить, что хотя туннельный диод остается активным элементом до частоты $\omega_{\text{д}}$, $K_{\text{в}} = 1$ на частоте

$$\omega_1 = \frac{\sqrt{K_{\text{в0}} - 1}}{\sqrt{K_{\text{в0}}} - 1} \frac{1}{RC} < \omega_{\text{д}}.$$

При

$$K_{\text{в0}} \gg 1 \quad \omega_1 = \frac{1}{RC}.$$

Ограничение частотного диапазона широкополосного усилителя частотой $\omega_1 \ll \omega_{\text{д}}$ связано с шунтирующим действием емкости p — n-перехода. Влияние емкости туннельного диода в значительной степени уменьшается в резонансных усилителях, где она является элементом резонансного контура.

Параллельная схема резонансного усилителя

Принципиальная схема резонансного усилителя показана на рис. 6. Если $L \ll \frac{R^2 C}{[1 + (\omega RC)^2]}$ (см. [3]), то влиянием индуктивности диода можно пренебречь, так как при этом условии туннельный диод будет иметь только емкостную реактивную составляющую. В этом случае проводимость цепи справа от точек *1*, *2* на рис. 6 равна

$$\frac{1}{Z_{1,2}} = \frac{1}{j\omega L_{\text{к}}} + \frac{1}{r - \frac{R}{1 - j\omega RC}}.$$

На резонансной частоте $\omega_р$, определяемой из условия $\mathrm{Im}\,\frac{1}{Z_{1,2}} = 0$, проводимость между точками *1*, *2* будет равна

$$\frac{1}{Z_{1,2}} \simeq -\frac{1-\left(\frac{\omega_р}{\omega_д}\right)^2}{R}.$$

Подставив это выражение в формулу (2) вместо $1/Z_д$, получим коэффициент усиления резонансного усилителя

$$K_{вр} = \left\{\frac{1}{1-\frac{R_п}{R}\left[1-\left(\frac{\omega_р}{\omega_д}\right)^2\right]}\right\}^2. \qquad (7)$$

Отсюда видно, что, подбирая индуктивность $L_к$ и сопротивление $R_п$, можно осуществить схему усилителя, коэффициент усиления которого будет больше единицы на частоте, близкой $\omega_д$. Легко видеть, что увеличение усиления на высоких частотах произошло при одновременном сокращении полосы усиливаемых частот. В работе [18] показано, что эквивалентная добротность схем, подобных показанной на рис. 6, равна

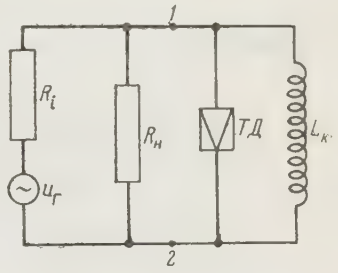


Рис. 6. Схема резонансного усилителя параллельного типа

$$Q_{экв} = \frac{Q}{1+\frac{Z_р}{R_{экв}}},$$

где Q — добротность контура $L_кC$ с сопротивлением потерь r; $Z_р$ — резонансное сопротивление контура; $R_{экв}$ — полное сопротивление, включенное параллельно резонансному контуру $L_кC$.

Следовательно, полоса усиливаемых частот равна

$$\Delta\omega = \frac{1}{R_п C}\left\{1-\frac{R_п}{R}\left[1-\left(\frac{\omega_р}{\omega_д}\right)^2\right]\right\} = \frac{1}{R_п C}\frac{1}{\sqrt{K_{вр}}}.$$

Используя (7), легко получить

$$\Delta\omega\sqrt{K_{вр}} = \frac{1}{R_п C}\cdot\frac{1-\left(\frac{\omega_р}{\omega_д}\right)^2}{RC\left(1-\frac{1}{\sqrt{K_{во}}}\right)}. \qquad (8)$$

Таким образом, произведение $\Delta\omega\sqrt{K_{вр}}$ пропорционально $1/RC$ (так же, как и для электронных ламп) и убывает с увеличением рабочей частоты $\omega_р$. Для большинства практических случаев, когда $K_{вр} \gg 1$, $\omega_р \ll \omega_д$, соотношение (8) принимает вид

$$\Delta\omega\sqrt{K_{вр}} \simeq \frac{1}{RC}. \qquad (9)$$

Последнее соотношение используется во многих работах [11, 15] и, как показывают проведенные расчеты, является приближенным. Но так как в реальных схемах сделанные выше предположения, как правило, выполняются, то соотношение (9) оказывается вполне пригодным для оценки частотных и усилительных свойств туннельного диода.

Последовательная схема усилителя

Согласно определению коэффициент вносимого усиления для последовательной схемы, изображенной на рис. 3, имеет следующий вид:

$$K'_{в} = \left| \frac{R_i + R_н}{R_i + R_н + Z_д} \right|^2 . \tag{10}$$

Подставив в это соотношение вместо $Z_д$ выражение (3), получим

$$K'_{в} = \frac{1 + \frac{R}{r}\left(\frac{\omega}{\omega_д}\right)^2}{\frac{1}{K'_{в0}} + \frac{R^2}{rR_\Sigma}\left(\frac{\omega}{\omega_д}\right)^2 + \left[\frac{R^2}{rR_\Sigma}\left(\frac{\omega}{\omega_д}\right)^2\right]^2}, \tag{11}$$

где

$$K'_{в0} = \frac{1}{\left(1 - \frac{R - r}{R_\Sigma}\right)^2}; \quad R_\Sigma = R_i + R_н.$$

Легко видеть, что при

$$\frac{1}{K'_{в0}} \ll \frac{R^2}{rR_\Sigma}\left(\frac{\omega}{\omega_д}\right)^2 + \left[\frac{R}{rR_\Sigma}\left(\frac{\omega}{\omega_д}\right)^2\right]^2$$

и

$$\frac{1}{K'_{в0}} \simeq \frac{1}{K_{в0}} \ll 1, \text{ т. е. } R_\Sigma \simeq R \text{ и } R_н = R,$$

выражение (11) совпадает с выражением (5). Таким образом, при сделанных предположениях широкополосные усилители, собранные по последовательной и параллельной схемам, имеют одинаковые частотные характеристики.

Если последовательно с туннельным диодом включить индуктивность, удовлетворяющую условию резонанса на рабочей частоте $\omega_р$ (см. (3))

$$\omega_р L_к - \frac{\omega_р R^2 C}{1 + (\omega_р RC)^2} = 0$$

и условию устойчивости (1), то коэффициент усиления на частоте $\omega_р$ будет равен

$$K'_{вр} = \left| \frac{1}{1 + \frac{1}{R_\Sigma}\left[r - \frac{R}{1 + (\omega_р RC)^2}\right]} \right|^2 . \tag{12}$$

Таким образом, подбирая величину индуктивности $L_к$ и сопротивления R_Σ, можно получить значительное усиление на частоте, близкой к предельной. Следует отметить, что случай $\omega_р \simeq \omega_д$ не имеет практического смысла, так как при $\omega_р \to \omega_д$ $R_\Sigma \to 0$. Практически достаточно большое усиление можно получить только на частотах в 5—10 раз меньших предельной частоты туннельного диода.

Результаты проведенных расчетов для усилителей, собранных по последовательной и параллельной схемам, иллюстрируются графиками рис. 7.

Приведенные соотношения для простейших типовых случаев позволяют дать рекомендации по выбору схемы усилителя.

Если известны параметры туннельного диода (R, C, r, L), внутреннее сопротивление генератора R_i, нагрузка $R_н$, рабочая частота $\omega_р$, полоса усиливаемых частот Δf и требуется выбрать тип схемы, позволяющей получить наибольший коэффициент усиления, то основным крите-

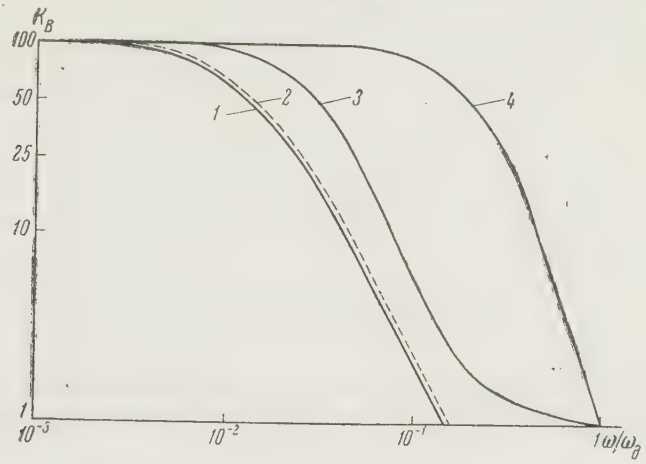


Рис. 7. Зависимость коэффициента усиления от частоты для различных схем усилителей:

1 — частотная характеристика широкополосного усилителя параллельного типа; *2* — частотная характеристика широкополосного усилителя последовательного типа; *3* — зависимость коэффициента усиления на резонансной частоте для усилителя последовательного типа (см. (12)); *4*—зависимость коэффициента усиления усилителя параллельного типа (см. (7))

рием выбора схемы является соответствие заданных параметров условиям устойчивости рабочей точки:

для последовательной схемы $R_i + R_н + r < |R|$ и $L < (R_i + R_н + r)\,|R|\,C$;

для параллельной схемы $\frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_н} > \frac{1}{|R - r|}$ и $L < \left(\frac{R_i R_н}{R_i + R_н} + r\right)|R|\,C$.

Если выполняются все четыре неравенства, то вопрос о выборе схемы решается сравнением выражений (5) и (11) для широкополосных схем и выражений (7), (12) — для резонансных схем.

Краткий анализ схем усилителей СВЧ

Приведенные выше расчеты относились к схемам усилителей с сосредоточенными постоянными. На практике наибольший интерес представляют усилители УКВ- и СВЧ-диапазонов, в которых существенную роль играет распределенный характер элементов схемы.

Возможны два типа параллельных усилителей СВЧ, отличающихся местом включения туннельного диода.

1) Проходная схема усилителя, изображенная на рис. 8, когда туннельный диод включен в линию между нагрузкой и генератором.

2) Отражательная схема (рис. 9), когда туннельный диод включен после нагрузки.

В частном случае, когда $Z_н = Z_г = Z_0$, где Z_0 — волновое сопротивление линии, схема рис. 8 будет устойчивой, если

$$\frac{1}{2} Z_0 + r < |R|$$

$$L < \left(\frac{1}{2} Z_0 + r\right) R^2 C.$$

Расчеты показывают, что для проходной схемы при любых соотношениях между Z_0, $Z_н$, $Z_г$ выражение для номинального коэффициента усиления имеет следующий вид:

$$K = \frac{4}{\left|\left[Z_г\left(\frac{1}{Z_г}+\frac{1}{Z_н}+\frac{1}{Z_д}\right)+jZ_0\left(\frac{Z_г}{Z_0^2}+\frac{1}{Z_0}+\frac{1}{Z_д}\right)\operatorname{tg}\beta l_1\right]\cos\beta l_1\right|^2}.$$

Если $Z_г = Z_0$, то

$$K = \frac{4}{\left|Z_0\left(\frac{2}{Z_0}+\frac{1}{Z_д}\right)\right|^2}.$$

Для частоты, соответствующей $\operatorname{tg}\beta l_1 = 0$, где $\beta = 2\pi/\lambda$ — волновое число,

$$K = \frac{4}{\left|Z_г\left(\frac{1}{Z_г}+\frac{1}{Z_0}+\frac{1}{Z_д}\right)\right|^2}.$$

Аналогичные вычисления для отражательной схемы, изображенной на рис. 9, дают следующее выражение для номинального коэффициента усиления:

$$K = \frac{4}{\left|\left[Z_г\left(\frac{1}{Z_г}+\frac{1}{Z_0}+\frac{1}{Z_1}\right)+j\left(1+\frac{Z_0}{Z_1}+\frac{Z_г}{Z_0}\right)\operatorname{tg}\beta l_1\right]\cos\beta l_1\right|^2},$$

где

$$Z_1 = Z_0\frac{Z_д + jZ_0\operatorname{tg}\beta l}{Z_0 + jZ_д\operatorname{tg}\beta l}.$$

Если $Z_г = Z_0$, то

$$K = \frac{4}{\left|Z_0\left(\frac{2}{Z_0}+\frac{1}{Z_1}\right)\right|^2}.$$

Приведенные расчеты показывают, что в частном случае, когда $Z_г = Z_0$ и $Z_н = Z_0$, выражение для коэффициента усиления проходного усилителя совпадает с выражением для коэффициента усиления широкополосного усилителя с сосредоточенными постоянными (см.(2)).

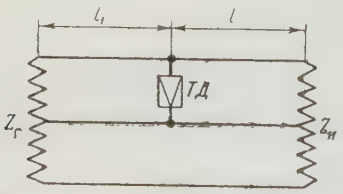


Рис. 8. Проходная схема СВЧ-усилителя параллельного типа

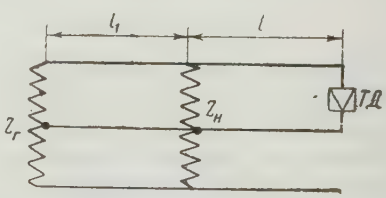


Рис. 9. Отражательная схема СВЧ-усилителя параллельного типа

Для усилителя отражательного типа указанное совпадение будет иметь место только при дополнительном условии $\operatorname{tg}\beta l = 0$ или $|Z_0| = |Z_д|$.

Для увеличения предельной частоты усиления емкость туннельного диода можно компенсировать при помощи замкнутого отрезка линии (рис. 10), длина которого должна удовлетворять условию

$$\operatorname{tg}\beta l_0 = -\frac{|Z_д|^2}{Z_0(\operatorname{Im} Z_д)}.$$

Если пренебречь индуктивностью и сопротивлением потерь туннельного диода, то последнее выражение совпадает с выражением, полученным в [19].

Влияние отрезка линии длины l_0 на рис. 10 эквивалентно включению индуктивности $L_к$ в схеме рис. 6. Поэтому выражение для коэффициента усиления проходного усилителя с замкнутым отрезком линии при $Z_г = Z_н = Z_0$ совпадает с выражением (7) для параллельного резонансного усилителя с сосредоточенными постоянными.

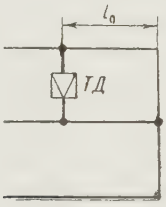


Рис. 10

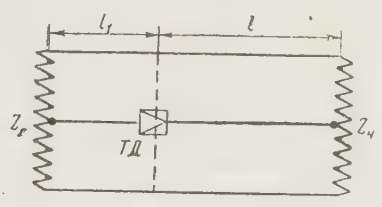


Рис. 11

Рис. 10. Схема компенсации емкости туннельного диода на СВЧ

Рис. 11. Схема СВЧ-усилителя последовательного типа

Типовая последовательная схема усилителя с линией изображена на рис. 11.

Анализ этой схемы приводит к следующему выражению для номинального коэффициента усиления (при $Z_н = Z_0$):

$$K = \frac{4\,|Z_0|^2}{\left|\left[(Z_д + Z_0 + Z_г) + j\left(Z_0 + \frac{Z_г}{Z_0}(Z_д + Z_0)\right)\operatorname{tg}\beta l_1\right]\cos\beta l_1\right|^2}.$$

Если $Z_г = Z_0$, то коэффициент усиления равен

$$K = \frac{4\,|Z_0|^2}{|Z_д + 2Z_0|^2}.$$

Если $Z_г \neq Z_0$, но $\operatorname{tg}\beta l_1 = 0$, то

$$K = \frac{4\,|Z_0|^2}{|Z_д + Z_0 + Z_г|^2}.$$

Как легко убедиться, последнее соотношение для последовательной схемы усилителя с распределенными элементами совпадает с выражением (10) для последовательного усилителя с сосредоточенными постоянными.

2. НЕЛИНЕЙНЫЕ СВОЙСТВА ТУННЕЛЬНЫХ ДИОДОВ

Все приведенные в предыдущих разделах соотношения для расчета частотных и усилительных свойств усилителей на туннельных диодах, строго говоря, справедливы лишь для сигналов с бесконечно малыми амплитудами, когда характеристику туннельного диода в окрестности рабочей точки можно представить линейной функцией. Как известно, реальная характеристика туннельного диода является существенно нелинейной, а амплитуды усиливаемых сигналов могут заметно превышать тот допустимый предел, до которого вольтамперную характеристику можно считать линейной [36]. Кроме этого, нестабильность источника постоянного смещения также может привести к изменению положения рабочей точки и, следовательно, отклонению действительного значения коэффициента усиления от значения, рассчитанного по линейной теории.

Для оценки величины и характера нелинейности рассмотрим более детально характеристику туннельного диода, представленную на рис. 12, *а*. Пунктиром на рис. 12, *а* изображены отдельные составляющие токов через туннельный диод в прямом направлении. Кривая *1* соответствует результирующему туннельному току через переход и имеет колоколообразную форму; кривая *2* соответствует нормальному диффузионному току; кривая *3* отображает зависимость избыточного тока, связанного с наличием дополнительных примесных уровней в запрещенной зоне полупроводника [20, 21, 22], от напряжения на туннельном диоде. Зависимость избыточного тока от напряжения в настоящее время еще недостаточно изучена и кривая *3* на рис. 12, *а* является лишь одним из возможных приближений, принятых в работе [5].

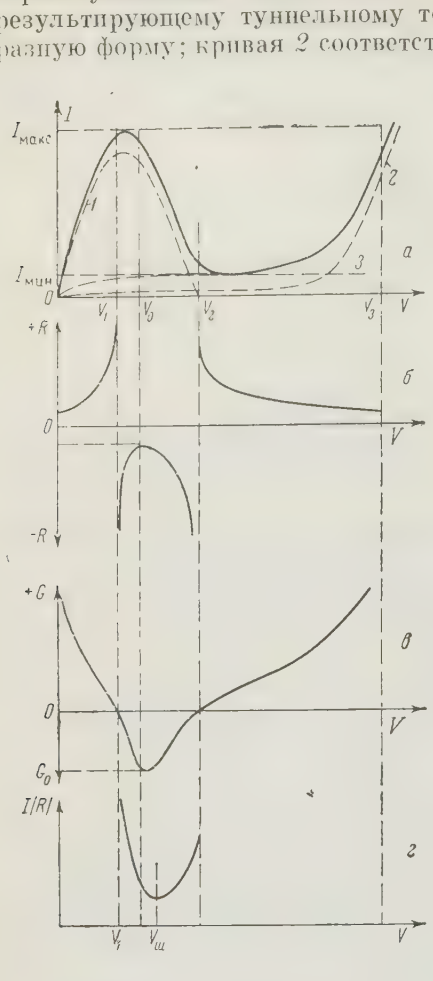


Рис. 12.

а — вольтамперная характеристика туннельного диода: *1* — зависимость туннельного тока от напряжения, *2* — зависимость диффузионного тока от напряжения, *3* — зависимость избыточного тока от напряжения; *б* — зависимость дифференциального сопротивления туннельного диода от напряжения; *в* — зависимость дифференциальной проводимости туннельного диода от напряжения; *г* — зависимость произведения $I\,|R|$ от напряжения.

Как следует из рис. 12, *а*, результирующая кривая (сплошная линия), полученная в результате сложения всех указанных составляющих токов, имеет падающий участок характеристики, расположенный между довольно острым максимумом ($I_{макс}$) и весьма размытым минимумом ($I_{мин}$).

Поскольку рабочая точка в усилительных схемах выбирается на падающем участке характеристики, то наибольший интерес представляет характер зависимости $R = f_1(V)$ (см. рис. 12, *б*) или $G = f_2(V)$ (см. рис. 12, *в*) в интервале напряжений от V_1 до V_2.

Расчеты, проведенные по линейной теории, показывают, что для обеспечения заданного коэффициента усиления рабочая точка может быть выбрана в любом месте на падающем участке; при этом безразлично, какое значение будет иметь $|R|$, поскольку подбором соответствующего сопротивления нагрузки всегда можно обеспечить сколь угодно большой коэффициент усиления. Однако, как следует из рассмотрения реальных характеристик на рис. 12, *б*, *в*, наиболее подходящей является рабочая точка при напряжении V_0, которая соответствует минимальному значению $|R|$ или максимальной крутизне $|G|$. Этот вывод обусловлен тем, что дифференциальные значения $|R|$ или $|G|$ весьма мало меняются в окрестности точки I_0, V_0. Таким образом, в точке I_0, V_0 можно обеспечить минимальные нелинейные искажения при максимальной выходной мощности. Кроме того, в том случае, когда рабочая точка сдвинута относительно V_0, существует опасность самовозбуждения схемы при изменении напряжения на туннельном диоде, поскольку одно из условий устойчивости можно

быть нарушено вблизи V_0. Выбор смещения в точке V_0 целесообразен еще и потому, что в этом случае предельная частота $\omega_д$ и произведение $\Delta f\sqrt{K}$ будут иметь максимальные значения.

На выбор рабочей точки заметное влияние может оказать дробовой шум туннельного диода, который, как показано в работах [23, 24], пропорционален произведению $I|R|$. Как следует из рис. 12, *г*, это произведение имеет минимум при напряжении $V = V_ш$, которое оказывается несколько смещенным вправо относительно V_0. Поэтому окончательный выбор рабочей точки на вольтамперной характеристике зависит от назначения усилителя и в каждом частном случае определяется на основании компромиссного решения.

В настоящее время не существует простого аналитического выражения для вольтамперной характеристики туннельного диода [5, 25, 26, 27, 49], достаточно точно описывающего все процессы, протекающие в узких *p* — *n*-переходах, образованных двумя вырожденными полупроводниками. Все известные в настоящее время аналитические выражения вольтамперной характеристики либо являются полиномами не ниже восьмой степени, либо содержат различные комбинации экспоненциальных членов. Поэтому для оценки нелинейных свойств туннельного диода мы воспользуемся приближенным выражением для проводимости $G(V)$:

$$G(V) = \alpha (V - V_0)^2 - G_0, \tag{13}$$

где $\alpha = \text{const}$. Это выражение, как показывает экспериментальная проверка, достаточно точно аппроксимирует зависимость $G(V)$ в небольшой окрестности ($\Delta V < 0{,}1\ V_0$) рабочей точки V_0.

В усилительных схемах зависимость G от V приводит к тому, что коэффициент усиления становится функцией напряжения смещения и амплитуды переменного сигнала, т. е. $K = f(V + A)$, где A — амплитуда переменного сигнала; $V = V_0 + \delta V$ — постоянное смещение, δV—флуктуация напряжения источника питания.

Относительное изменение коэффициента усиления можно определить следующим образом:

$$\eta_у = \frac{\Delta K}{K_{в0}} = 1 - \frac{K_в (V + A)}{K_{в0}}, \tag{14}$$

где $K_{в0} = 1/(1 - R_п G_0)^2$ — значение коэффициента вносимого усиления при $A \to 0$ и $V = V_0$.

Согласно (2) выражение для $K_в (V + A)$ можно представить в следующем виде:

$$K_в = \frac{1}{(1 - R_п G_{эф})^2}, \tag{15}$$

где $G_{эф}$ — эффективная крутизна характеристики в рабочей точке, усредненная за период.

Значение $G_{эф}$ можно найти из энергетических соображений. Средняя величина энергии, отдаваемая туннельным диодом за период в нагрузку, должна быть равна средней энергии, выделяемой на эффективной проводимости $G_{эф}$ за этот же интервал времени.

$$G_{эф} = G_0 - \alpha \frac{\int_0^{2\pi} (\Delta V)^4 d\varphi}{\int_0^{2\pi} (\Delta V)^2 d\varphi} = G_0 - \frac{3}{4} \alpha A^2 \frac{\frac{8}{3}\beta^4 + 4\beta^2 + 1}{2\beta^2 + 1}, \tag{16}$$

где $\varphi = \omega t$; $\beta = \delta V / A$; $\Delta V = A \cos \varphi + \delta V$.

Подставляя (16) в (15), получим выражение для $K_в$, которое, в общ случае, не будет совпадать со значением коэффициента усиления, найде ным из линейной теории.

Следует отметить два частных случая, которые с одинаковой вероя ностью могут встречаться на практике. Первый случай соответствует т кому режиму работы усилителя, когда амплитуда переменного сигна A на диоде оказывается много больше флуктуаций δV, связанных с н стабильностью источника питания. Тогда $\beta \ll 1$ и выражение для $G_{эф}$ пр нимает вид

$$G_{эф} = G_0\left(1 - \frac{3}{4}\frac{\alpha A^2}{G_0}\right). \quad (1$$

Используя (14), (15) и (17), для относительного изменения коэффициен усиления получим

$$\eta_у = 1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{3}{4} R_п \alpha A^2 \sqrt{K_{в0}}\right)^2}.$$

Для типовых значений параметров ($V_0 - V_1 \gtrsim 50$ *мв*, $R_п G_0 \sim 1$) и $A \leqslant 5$ *мв*, $\sqrt{K_{в0}} < 10^2$ второй член в скобках оказывается мень единицы и последнее выражение после упрощения принимает вид

$$\eta_у \simeq \frac{3}{2} R_п G_0 \left(\frac{A}{V_0 - V_1}\right)^2 \sqrt{K_{в0}},$$

откуда непосредственно следует, что при заданном значении $\eta_у$ амп туды сигналов A_1 и A_2 для двух усилителей, имеющих коэффициенты у ления $K_{в01}$ и $K_{в02}$, связаны между собой соотношением

$$\frac{A_1}{A_2} = \sqrt[4]{\frac{K_{в02}}{K_{в01}}\frac{R_{п2}}{R_{п1}}}.$$

Таким образом, нелинейность вольтамперной характеристики нак дывает существенные ограничения на допустимую амплитуду сигна В усилителях на германиевых туннельных диодах уже при коэффицие усиления порядка 25 *дб* максимальная амплитуда сигнала на диоде должна превышать величину порядка 2 *мв*. Поскольку обычно нагру включается параллельно туннельному диоду и ее сопротивление п близительно равно дифференциальному сопротивлению диода в рабо точке, то максимальное значение мощности сигнала в нагрузке мож оценить величиной $P = A^2/R$. Если $A \simeq 2$ *мв*, то $P \simeq 4 \cdot 10^{-6}/R$ *вт*.

Отсюда следует, что с точки зрения увеличения выходной мощно целесообразно использовать туннельные диоды с малым значением Однако применение таких диодов сопряжено с дополнительными тр ностями, связанными с уменьшением омических потерь в проводах, уме шением внутреннего сопротивления источника питания и подавлением разитной генерации. Поэтому для германиевых туннельных диодов, у торых $|R| = 10 - 150$ *ом*, выходная мощность обычно не превыш одного микроватта. Если пренебречь нелинейными искажениями и счита что возможный размах колебаний на туннельном диоде определяется личиной $V_2 - V_1$ (см. рис. 12, *а*), то для оценки максимальной выход мощности германиевых туннельных диодов получим следующее прибл женное соотношение [30]:

$$P_{макс} = \frac{10^{-2}}{R}\ вт.$$

Второй частный случай соответствует работе схемы, предназначен для усиления очень слабых сигналов, когда амплитуда колебаний A о

зывается много меньше, чем величина флуктуаций напряжения смещения δV. При этом $\beta \gg 1$ и согласно (16)

$$G_{эф} = G_0 - \alpha (\delta V)^2.$$

Тогда относительное изменение коэффициента усиления, связанное только с нестабильностью источника питания, будет равно

$$\eta_у = 1 - \frac{1}{[1 + \alpha (\delta V)^2 R_п \sqrt{K_{в0}}]^2} \simeq$$

$$\simeq 2\alpha (\delta V)^2 R_п \sqrt{K_{в0}} =$$

$$= 2 \left(\frac{\delta V}{V_0 - V_1} \right)^2 \sqrt{K_{в0}},$$

откуда

$$\eta_E = \frac{\delta V}{V_0} = \sqrt{\frac{\eta_E}{2R_п G_0 \sqrt{K_{в0}}}} \left(1 - \frac{V_1}{V_0}\right).$$

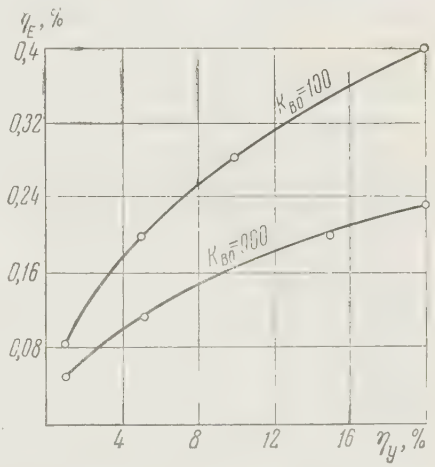


Рис. 13. Зависимость коэффициента нестабильности усилителя $\eta_у$ от коэффициента нестабильности источника питания η_E

Последнее соотношение позволяет рассчитать величину допустимого относительного изменения напряжения источника питания η_E при заданном коэффициенте $\eta_у$.

На рис. 13 представлена зависимость η_E от $\eta_у$, построенная для двух значений $K_{в0} = 100$ и $K_{в0} = 900$ в предположении, что $R_п G_0 = 1$, и $V_1/V_0 \simeq 5/8$.

Как следует из рис. 13, требования, предъявляемые к стабильности источников питания, довольно высоки. Это обстоятельство может иметь весьма существенное значение при конструировании стабильных усилителей с высоким коэффициентом усиления.

О температурной зависимости коэффициента усиления

Говоря о стабильности усилителей, необходимо особо остановиться на температурной зависимости параметров туннельных диодов, которая в большой степени определяет надежность работы всей схемы в целом.

Несмотря на то, что туннельный эффект в узких p — n-переходах наблюдается в очень широком диапазоне температур (от —269 до 200—300° С) [6], весьма существенное изменение параметров реальных диодов имеет место уже в интервале ±50° С. Теоретические и экспериментальные исследования, посвященные температурной зависимости параметров туннельных диодов, проведенные различными авторами [21, 28], показывают, что наиболее сильному влиянию подвержен избыточный ток, обусловливающий вид характеристики в районе минимума. Менее сильно меняется ток максимума; при этом направление его изменения в очень сильной степени зависит от типа полупроводника и степени легирования [22, 28, 29]. Такой сложный характер температурной зависимости связан с большим числом физических параметров (положение уровня Ферми, ширина запрещенной зоны, эффективная масса и др.), которые по-разному меняются от температуры в зависимости от типа материала и кон-

центрации введенной примеси. Поэтому результирующий процесс може иметь температурный коэффициент любого знака. Обычно германиевы диоды, легированные индием, галлием и мышьяком с удельным сопротивле нием порядка $6 \cdot 10^{-4}$ *ом·см*, обнаруживают с ростом температуры умень шение тока $I_{макс}$ и увеличение $I_{мин}$. В результате с повышением темпе ратуры увеличивается модуль дифференциального сопротивления.

Как показано в работе [19], в которой исследовалась температурная стабильность усилителя, наилучший эффект получается при стабилиза ции тока в рабочей точке и наихуд ший — при стабилизации напряжения С физической точки зрения этот ре зультат можно объяснить тем, что кру

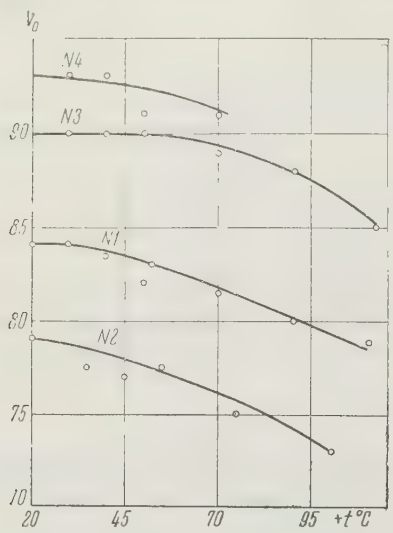


Рис. 14. Зависимость положения точки перегиба от температуры для четырех туннельных диодов

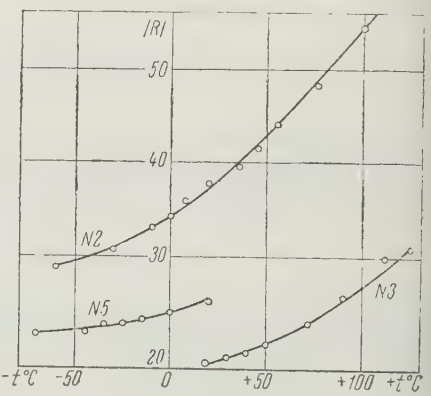


Рис. 15. Зависимость модуля дифференциального сопротивления от температуры для трех туннельных диодов

тизна характеристики, от которой зависит коэффициент усиления для идеального туннельного диода ($I_{мин} = 0$), пропорциональна туннельной вероятности через переход. Поскольку ток через переход также пропор ционален туннельной вероятности, то, стабилизируя ток в рабочей точке можно ожидать, что мы тем самым будем стабилизировать и коэффициент усиления. Правильность такого рода стабилизации качественно подтвер дилась в экспериментах, проведенных авторами.

На рис. 14 представлена экспериментальная зависимость изменения напряжения V_0, соответствующего точке с максимальной крутизной, от температуры. Как следует из рис. 14, точка перегиба на вольтамперной характеристике смещается влево к началу координат для всех испытан ных диодов. Эта тенденция будет также иметь место и в том случае, если в схеме осуществлена стабилизация рабочей точки по току.

Однако исследования температурных семейств характеристик туннель ных диодов показывают, что получить в широком интервале температур достаточно хорошие результаты при стабилизации тока рабочей точки не удается. Это, по-видимому, связано с тем, что в реальных диодах на вид вольтамперной характеристики весьма сильно влияет избыточный ток который имеет иной температурный коэффициент [21], чем ток максимума Чем больше диапазон изменения температуры, тем сильнее сказывается влияние избыточного тока, и крутизна в рабочей точке начинает более сильно зависеть от температуры.

Для иллюстрации количественного изменения с температурой модуля дифференциального сопротивления в точке перегиба характеристики

на рис. 15 представлено несколько экспериментальных кривых для германиевых диодов с удельным сопротивлением $\rho \simeq 6 \cdot 10^{-4}$ *ом·см*. Уже самое поверхностное изучение кривых рис. 15 показывает, что вопросы, связанные с температурной стабилизацией схем на туннельных диодах, весьма актуальны.

3. ШУМОВЫЕ СВОЙСТВА УСИЛИТЕЛЕЙ НА ТУННЕЛЬНЫХ ДИОДАХ

Одной из важнейших характеристик усилителя на туннельном диоде является величина вносимого им шума. Источниками шумов в усилителях на туннельных диодах являются: 1) дробовой шум, связанный с током, протекающим через p — n-переход, 2) низкочастотный шум, связанный с утечкой через переход, спектральная плотность которого убывает по закону $1/f$, 3) тепловой шум в сопротивлении потерь туннельного диода, 4) тепловой шум в нагрузке [30].

Как показано в [30], шум $1/f$ у хороших туннельных диодов много меньше дробового шума уже на частотах выше 1 *кгц* и поэтому им обычно пренебрегают при расчете шумовых свойств усилителей на туннельных диодах.

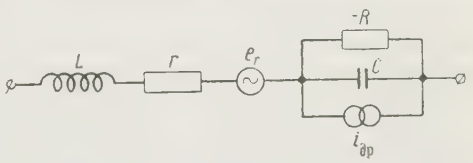


Рис. 16. Эквивалентная шумовая схема туннельного диода

Эквивалентная шумовая схема туннельного диода показана на рис. 16 [31, 32], где приняты следующие обозначения: e_r — шумовая эдс сопротивления потерь r, $i_{др}$ — дробовой ток через p — n-переход. Среднеквадратичные значения e_r и $i_{др}$ определяются выражениями

$$\overline{e_r^2} = 4kT_r r \Delta f,$$

$$\overline{i_{др}^2} = 2q\,(\gamma^2 I_{c\to v} + I_{v\to c})\Delta f,$$

где k — постоянная Больцмана; T_r — температура сопротивления потерь; q — заряд электрона; Δf — полоса частот; $I_{c\to v}$ — средний ток, вызванный туннельным переходом электронов из зоны проводимости n-области в p-область; $I_{v\to c}$ — средний ток, связанный с туннельным переходом валентных электронов из p-области в n-область; γ^2 — коэффициент «сглаживания» [33].

«Сглаживание» тока $I_{c\to v}$ обусловливается большой вероятностью перехода электронов из зоны проводимости n-области в p-область. Сглаживаться может только ток $I_{c\to v}$, так как вероятность перехода валентных электронов из p-области мала. Величина коэффициента γ зависит от структуры туннельного диода.

В работе [23] показано, что при достаточно больших смещениях $V > V_1$ (см. рис. 12, *а*) величина $I_{v\to c} \ll I_{c\to v}$. В этом случае результирующий ток через туннельный диод, равный $I_{c\to v} - I_{v\to c} = I_0$, практически совпадает с током $I_{c\to v}$, и среднеквадратичная величина дробового тока оказывается равной $\overline{i_{др}^2} = 2q\gamma^2 I_0$.

Исследование шумов в германиевых туннельных диодах на частотах 5 и 100 *Мгц* [34] показало, что при напряжении смещения, большем kT/q, шумы, в основном, определяются дробовыми процессами, а при меньших напряжениях приближаются к уровню тепловых шумов.

Одной из количественных характеристик шумовых свойств усилителя является коэффициент шума — величина, определяемая как отношение мощности шумов на выходе реального усилителя к мощности шумов на выходе идеального, т. е. не вносящего собственных шумов, усилителя, работающего с тем же генератором сигнала. Используя эквивалентную

шумовую схему туннельного диода (см. рис. 16), можно рассчитать коэффициент шума конкретного усилителя.

Вычисления показывают, что коэффициент шума собранного по параллельной схеме широкополосного усилителя (рис. 5) на частотах $\omega \ll \omega$ определяется выражением

$$F = 1 + \frac{T_н}{T_г}\frac{R_i}{R_н} + \frac{qI_0}{2kT_г}R_i + \frac{T_r}{T_г}\frac{rR_i}{R^2}, \quad (18$$

на частотах $\omega \sim \omega_д$

$$F = 1 + \frac{T_н}{T_г}\frac{R_i}{R_н} + \frac{qI_0}{2kT_г}R_i + \frac{T_r}{T_г}\frac{R_i}{2R}, \quad (19$$

где $T_н$ и $T_г$ — температуры нагрузки и генератора.

Если в выражении (18) пренебречь шумами в сопротивлении потерь r, то оно совпадает с выражением, полученным в работе [35].

Легко показать, что при малых значениях сопротивления потерь выражение для коэффициента шума параллельного резонансного усилителя (рис. 6) совпадает с выражением (18). Действительно, поскольку на резонансной частоте сопротивление контура чисто активно, эквивалентная схема резонансного усилителя будет аналогична низкочастотной схеме широкополосного усилителя. Отличие будет заключаться лишь в том, что в резонансном усилителе параллельно отрицательному сопротивлению туннельного диода, кроме сопротивления нагрузки и генератора, включено резонансное сопротивление контура.

Выражение для коэффициента шума резонансного усилителя при $r = 0$ приведено в работе [17]. Оно совпадает с выражением (18) с точностью до обозначений.

Как видно из выражений (18) и (19), член $\frac{T_н}{T_г}\frac{R_i}{R_н}$ можно значительно уменьшить за счет отношения $R_i/R_н$. Если взять $R_i/R_н \ll 1$, то из выражений (6а) и (7) при достаточно больших коэффициентах усиления на частотах $\omega \ll \omega_д$ следует, что $R_i \simeq R$. В этом случае, поскольку всегда $r \ll R$, получим

$$F \simeq 1 + \frac{qI_0R}{2kT_г}. \quad (2$$

Для резонансного усилителя, поскольку $\omega_р$ может быть близка к $\omega_д$, согласно (7), при $K_{вр} \gg 1$ получим

$$R_i \simeq \frac{R}{1 - \left(\frac{\omega_р}{\omega_д}\right)^2},$$

откуда, при сделанных выше предположениях,

$$F \simeq 1 + \frac{qI_0}{2kT_г}\frac{R}{\left[1 - \left(\frac{\omega_р}{\omega_д}\right)^2\right]}.$$

Таким образом, при $\omega_р \to \omega_д$ коэффициент шума резонансного усилителя неограниченно возрастает. Такой же результат получен в работе [31, 32].

В широкополосном усилителе всегда выполняется условие $R_н <$ Поэтому коэффициент шума в этом случае на всех частотах остается ограниченной величиной.

Для последовательного резонансного усилителя можно показать, что величина его коэффициента шума при достаточно большом уси

нии определяется выражением

$$F = 1 + \frac{T_{\text{н}}}{T_{\text{г}}}\frac{R_{\text{н}}}{R_i} + \frac{qI_0}{2kT_{\text{г}}}\left(1 + \frac{R_{\text{н}}}{R_i} + \frac{r}{R_i}\right)R + \frac{T_r}{T_{\text{г}}}\frac{r}{R_i}. \qquad (21)$$

В отличие от (18) величина коэффициента шума для последовательной схемы увеличивается при уменьшении отношения $R_i/R_{\text{н}}$. Если взять $R_i/R_{\text{н}} \gg 1$, то на частотах $\omega \ll \omega_{\text{д}}$ $R_i \simeq R$, и для коэффициента шума на низких частотах получим

$$F \simeq 1 + \frac{qI_0R}{2kT_{\text{г}}}. \qquad (22)$$

При сделанных предположениях, как следует из сравнения (20) с (22), выражения для последовательной и параллельной схем совпадают.

В общем случае для последовательной схемы, как видно из выражения (12), при большом усилении справедливо соотношение

$$R_\Sigma = R_i + R_{\text{н}} \simeq \frac{R}{1 + (\omega RC)^2} - r.$$

При условии $R_i/R_{\text{н}} \gg 1$ в последнем выражении можно пренебречь сопротивлением нагрузки $R_{\text{н}}$. Если полученное отсюда R_i подставить в (21), то выражение для коэффициента шума совпадает с выражением, приведенным в работе [32]. Из последних соотношений следует, что и в схеме последовательного резонансного усилителя на частотах, близких к предельной, коэффициент шума резко возрастает.

Величина коэффициента шума не является достаточным критерием применимости усилительного каскада, поскольку она не характеризует его усилительные свойства. Поэтому для более полной характеристики усилителя часто вводят величину M, которая определяется следующим образом [37, 40]:

$$M = \frac{F - 1}{1 - \frac{1}{K}},$$

где K — коэффициент усиления каскада. Последнее соотношение показывает, что усилитель должен быть рассчитан так, чтобы коэффициент M имел минимальное значение.

Используя (20) и (5), для параллельного широкополосного усилителя при $R_i/R_{\text{н}} \ll 1$ получим

$$M \simeq \frac{qI_0R}{2kT_{\text{г}}\left[1 - (\omega RC)^2\right]}.$$

На частотах $\omega \to 1/RC$ величина M неограниченно возрастает. Это показывает, что использование каскада на частотах, близких к предельной, лишено практического смысла.

При тех же предположениях ($R_i R_{\text{н}} \ll 1$ и $K_{\text{во}} \gg 1$) для параллельного резонансного усилителя получим

$$M \simeq \frac{qI_0R}{2kT_{\text{г}}\left[1 - \left(\frac{\omega_{\text{р}}}{\omega_{\text{д}}}\right)^4\right]},$$

откуда следует, что $M \to \infty$ при $\omega_{\text{р}} \to \omega_{\text{д}}$. Поэтому резонансный усилитель также не имеет смысла использовать на частотах, близких к предельной частоте туннельного диода.

Во всех приведенных выше приближенных выражениях член, характеризующий величину дробового шума, пропорционален произведению I_0R. Величина I_0R зависит от выбора рабочей точки.

Теоретический расчет напряжения смещения $V_ш$, при котором произведение I_0R имеет минимальное значение, приведен в работах [38, 39], откуда следуют чисто качественные выводы о том, какую форму должна иметь вольтамперная характеристика туннельного диода, обладающего наилучшими шумовыми свойствами. Эксперименты, проведенные авторами, показывают, что напряжение $V_ш$ смещено вправо относительно напряжения V_0 на 10—20 *мв*. Измерения проводились для германиевых туннельных диодов.

В точке V_0 величина I_0R больше минимального значения приблизительно на 5—10%. Поэтому если недопустимо такое увеличение дробового шума, то рабочую точку надо выбирать правее V_0. Это дает некоторый выигрыш в величине шума, но, как было показано выше, значительно ухудшает линейность и стабильность усилителя.

Минимальная величина коэффициента шума усилителей на туннельных диодах при комнатной температуре оценивается в 2—3 *дб*. Лучшие опытные образцы усилителей в настоящее время имеют коэффициент шума порядка 2 *дб* [41].

4. КОНСТРУКЦИИ УСИЛИТЕЛЕЙ НА ТУННЕЛЬНЫХ ДИОДАХ

Наиболее очевидными преимуществами туннельного диода перед известными в настоящее время полупроводниковыми и электровакуумными приборами являются малое потребление энергии (10^{-3}—10^{-4} *вт*), высокий частотный предел усиления (~100 *Ггц*), возможность создания малогабаритной аппаратуры и сравнительно низкий уровень шумов.

К сожалению, первое преимущество, связанное с малым потреблением энергии, пока еще не может быть использовано, так как для задания постоянного смещения обычно применяют стандартные элементы с напряжением 1,5—2,2 *в*, а избыток напряжения гасят балластным сопротивлением.

В результате мощность, потребляемая от источника питания, оказывается, как правило, больше или равной мощности, необходимой для питания аналогичных схем на полупроводниковых триодах.

Поскольку, с точки зрения размеров, схемы на туннельных диодах не имеют заметных преимуществ перед схемами на полупроводниковых триодах, можно сказать, что до частот порядка 100 *Мгц*, где современные полупроводниковые триоды обладают достаточно хорошими усилительными свойствами, использование схем на туннельных диодах вряд ли целесообразно. В пользу такого заключения говорит также и тот факт, что каскадное соединение усилителей на туннельных диодах связано с проблемой направленности, решение которой в указанном диапазоне частот представляет большие трудности. С другой стороны, построение многокаскадных усилителей на полупроводниковых триодах до частот 10^8 *гц* не вызывает серьезных затруднений.

Пожалуй, единственным преимуществом усилителей на туннельных диодах в этом диапазоне частот является их более низкий уровень шума.

На этих частотах возможны также комбинированные схемы, в которых туннельные диоды используются как согласующий межкаскадный элемент в усилителях на полупроводниковых триодах [42].

Таким образом, применение усилителей на туннельных диодах наиболее перспективно в УКВ- и СВЧ-диапазонах, где их преимущества проявляются наиболее ярко.

Главные трудности, возникающие при конструировании усилителей на туннельных диодах, в указанных диапазонах частот в основном связаны с вопросами согласования дифференциального сопротивления туннельного диода с соответствующими распределенными системами.

На рис. 17 показана конкретная схема резонансного усилителя [], собранного по последовательной схеме, работающего на частоте 100 *Мгц* с коэффициентом усиления 32 *дб*. В усилителе используется германие-

иод с параметрами: $C = 5$ *пф*, $R = 143$ *ом*, $r = 2$ *ом*. Все значения па-аметров схемы однозначно рассчитываются при помощи соотношений l) и (12). Генератор и нагрузка подключаются к схеме при помощи ли-ий с сопротивлением 50 *ом*, согласованных на концах. Согласование яв-яется необходимым условием нормальной работы усилителя, так как ри этом со стороны нагрузки и генератора не вносится никаких реактив-

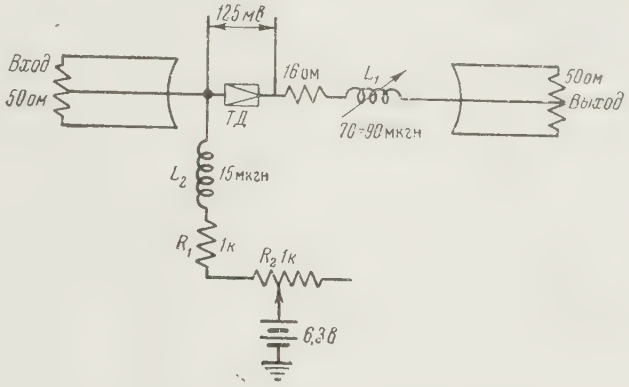


Рис. 17. Схема резонансного усилителя последовательного типа ($f = 100$ *Мгц*)

ых параметров. Индуктивность L_1 и емкость диода образуют колебатель-ый контур, настроенный на частоту 100 *Мгц*. Индуктивность L_2 выпол-яет функции дросселя, развязывая цепь постоянного смещения от схемы силителя. Балластные сопротивления R_1 и R_2 подбираются так, чтобы а туннельном диоде обеспечивалось падение напряжения, равное 125 *мв*, еобходимое для задания рабочей точки.

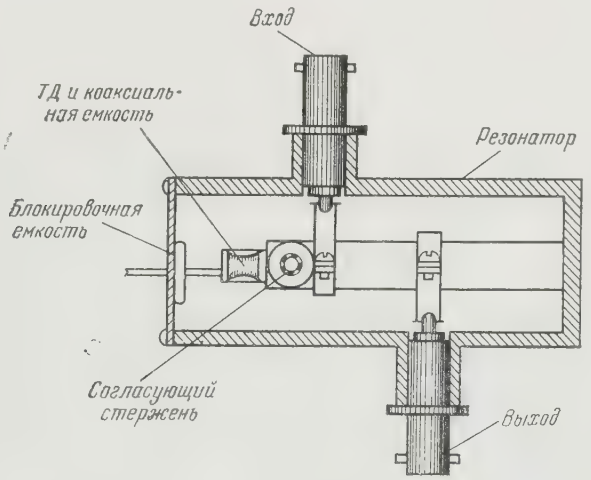


Рис. 18. Конструкция усилителя параллельного типа ($f = 460$ *Мгц*)

Типовая конструкция резонансного усилителя, описанная в работе 19], собранного по параллельной схеме и работающего в диапазоне ВКВ, представлена на рис. 18. Туннельный диод включен в полосковый езонатор, от которого при помощи коаксиальных линий сделаны отводы генератору и нагрузке. В конструкции предусмотрен согласующий стер-

жень, позволяющий обеспечить нормальную работу усилителя при изменении коэффициента стоячей волны в антенне от 1 до 1,8 *дб*. Перестройка резонатора осуществляется при помощи коаксиальной емкости, подключенной параллельно туннельному диоду. Для уменьшения реактивной составляющей сопротивления, обусловленной индуктивностью вводов туннельного диода и проводов от источника питания, в конце центрального проводника установлена блокировочная емкость в 1000 *пф*. Описанный усилитель работает в диапазоне частот от 405 до 460 *Мгц* с коэффициентом усиления 15 *дб*, коэффициентом шума 5,5 *дб* и полосой пропускания 12 *Мгц*. Использованный в схеме туннельный диод имел следующие параметры: $C = 7$ *пф*, $R = 100$ *ом*, $r = 1$ *ом* и индуктивность вводов $6 \cdot 10^{-9}$ *гн*. Размеры усилителя вместе с источником питания $48 \times 29 \times 16$ *мм*. Вес усилителя порядка 100 *г*.

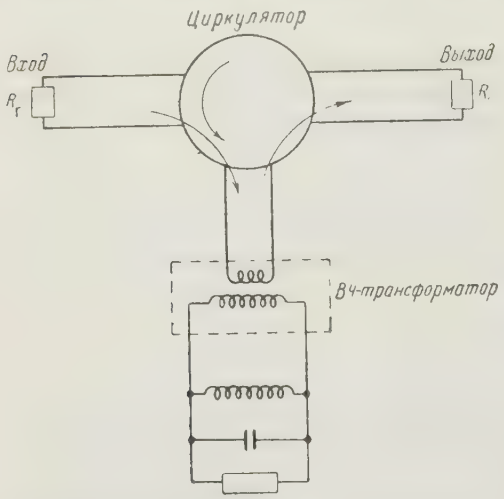


Рис. 19. Блок-схема усилителя с циркулятором

Для расширения полосы пропускания в усилителях на туннельных диодах часто используют вместо резонансного контура, настроенного на фиксированную частоту, полосовые фильтры [43]. В этом случае удается существенно увеличить произведение $\Delta f\sqrt{K}$. Усилители такого рода подробно описаны в работе [44]. Конструктивно фильтр выполнен в виде полосковых линий. Усилитель работает на частоте 330 *Мгц*, коэффициент вносимого усиления 25 *дб*, полоса пропускания 10 *Мгц* и расчетный коэффициент шума 2,7. Параметры туннельного диода следующие: $R = 133$ *ом*, $C = 5$ *пф*, $r = 1$ *ом*, $L = 10^{-9}$ *гн*.

Как уже отмечалось выше, основным недостатком туннельных диодов является их ненаправленность. Это обстоятельство существенно затрудняет конструирование многокаскадных усилителей. Для преодоления этой трудности применяют два метода [15], широко используемые в технике СВЧ.

Первый из них предусматривает наличие в схеме усилителя циркулятора (см. рис. 19). Сигнал от генератора через ферритовый ответвитель (циркулятор) проходит в усилитель. Усиленный сигнал отражается к циркулятору, который направляет его только в сторону нагрузки. Таким образом, передача усиленного сигнала осуществляется только в одном направлении. Использование в схеме циркулятора позволяет уменьшить коэффициент шума и обеспечить достаточно устойчивую работу нескольких каскадов усилителей на туннельных диодах.

Практическая схема и конструкция усилителя на туннельном диоде с циркулятором описаны в работе [45]. Этот усилитель работал на частоте 4,5 *Ггц* с коэффициентом усиления 23 *дб*, полосой пропускания 20 *Мгц*, эффективной шумовой температурой 1200° К (7 *дб*) и максимальной выходной мощностью 10^{-6} *вт*.

Применение циркуляторов наиболее целесообразно в сантиметровом диапазоне, где их размеры могут быть достаточно малы. В диапазоне УКВ размеры ферритовых ответвителей могут оказаться чрезмерно большими, что, как правило, ограничивает предел их применимости на таких частотах.

Другим методом, позволяющим осуществить направленную передачу сигнала, является метод гибридных волновых соединений [41, 46]. Типовая блок-схема усилителя, использующего такое соединение, показана на рис. 20. Основным элементом этой схемы является гибридное кольцо, выполненное в виде коаксиальной линии или волновода. Как показано на рис. 20, генератор, нагрузка и два усилителя на туннельных диодах подключаются к различным точкам гибридного кольца.

Поскольку длина линии между вторым усилителем и кольцом на четверть длины волны больше, чем l, то согласно обозначениям, указанным на рис. 20, фазовые соотношения в схеме приводят к тому, что сигналы, отраженные от усилителей, приходят к генератору в противофазе и не воздействуют на него.

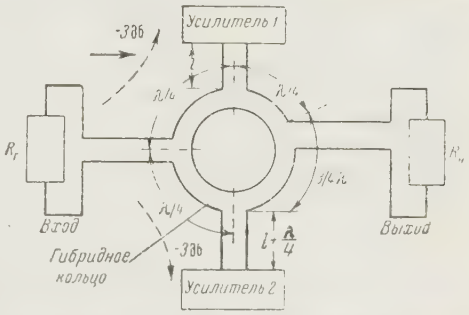


Рис. 20. Блок-схема усилителя с гибридным кольцом

С другой стороны, в силу тех же фазовых соотношений в гибридном кольце, эти сигналы будут складываться в нагрузке. В результате усилитель будет обладать направленностью. В отличие от схем с циркуляторами, усилители, собранные по гибридной схеме, весьма чувствительны к рассогласованию в цепях нагрузки и генератора. Поэтому для их устойчивой работы, как правило, необходимо использовать дополнительные согласующие элементы.

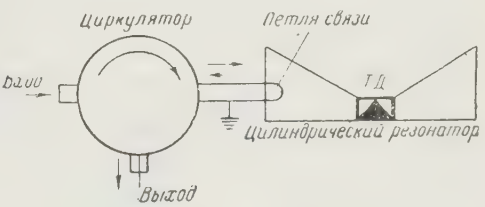


Рис. 21. Конструкция СВЧ-усилителя цилиндрическим резонатором и циркулятором ($f = 7 - 26$ *Гц*)

Теоретическое и экспериментальное исследования усилителя с гибридным соединением изложены в работе [41]. Усилитель стабильно работал в полосе частот от 210 до 625 *Мгц* с коэффициентом усиления $8{,}2 \pm 0{,}6$ *дб*. Коэффициент шума на частоте 350 *Мгц* составлял $1{,}93 \pm 0{,}4$ *дб*. Нормальная работа усилителя не нарушалась при коэффициенте стоячей волны на входе $\leqslant 2$ *дб* и на выходе $\leqslant 1{,}05$. Потеря усиления в гибридном соединении между генератором и усилителями составляла 3 *дб*. В усилителе был использован туннельный диод j56z ($I_{макс} = 1{,}1$ *ма*, $R = 115$ *ом*, $f_д = 2{,}1$ *Гц*).

С точки зрения максимальной усиливаемой частоты, которая может быть получена на современных туннельных диодах, представляет большой интерес работа [47], в которой изложены результаты исследования нескольких схем усилителей на туннельных диодах из арсенида галлия.

f, Гц	*K, дб*	*F, дб*
6,8	25	7,5
9,7	22	10,7
10,8	26	11,5
25,8	36	—

Испытуемый диод помещался в центр цилиндрического резонатора, имевшего в сечении форму конуса (рис. 21). Резонатор работал на отражение и поэтому имел только один вход в виде петли связи, через который поступал сигнал от генератора и выводился усиленный отраженный сигнал. Разделение входного сигнала от выходного осуществлялось при помощи циркулятора.

По схеме рис. 21 [47] были исследованы усилители, работавшие на частотах 6,8; 9,7; 10,8 и 25,8 *Гц*. Основные результаты измерений указаны в таб

нице. При помощи согласующего винта, регулирующего положение петли связи в резонаторе, можно было менять коэффициент усиления от 5 до 38 *дб*. Полоса пропускания при этом соответственно уменьшалась. Усилитель, работавший на частоте 10,8 *Ггц*, имел полосу порядка 300 *Мгц* при $K = 5$ *дб* и 8 *Мгц* при $K = 28$ *дб*.

Испытанные диоды были изготовлены из арсенида галлия с удельным сопротивлением $\rho = 15 \cdot 10^{-4}$ *ом·см*. Величина $I_{макс}$ лежала в пределах 0,5—1 *ма*, а отношение $I_{макс}/I_{мин}$ было $\geqslant 3$.

Кроме рассмотренных выше схем усилителей большой интерес представляют также распределенные системы, теоретически рассмотренные в работе [15].

На рис. 22, *а* изображена одна из возможных моделей распределенного туннельного диода, имеющего форму полосковой линии, при помощи которого можно осуществить усилитель с бегущей волной. Как показывают предварительные расчеты, такой усилитель будет иметь достаточно высокий частотный предел и большое волновое сопротивление только при очень малой ширине (W) туннельного диода (см. рис. 22).

Поэтому более перспективной следует считать модель распределенного усилителя, изображенную на рис. 22, *б*, где конструктивно p — n-переход выполнен в виде «ножевого» контакта, расположенного посередине

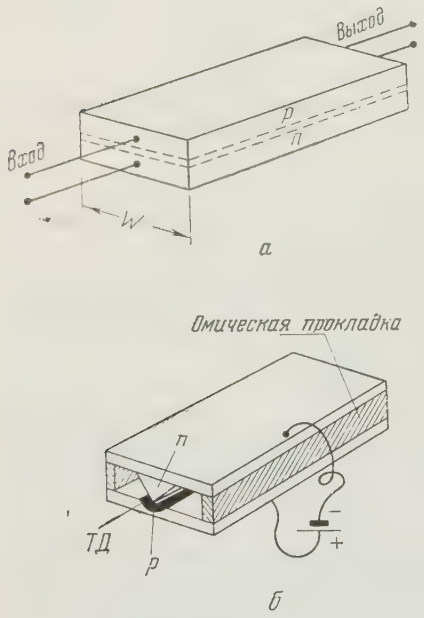


Рис. 22. Модель распределенного усилителя на туннельном диоде:

а — туннельный диод с плоским контактом; *б* — туннельный диод с ножевым контактом

полосковой линии. Как показывает предварительный анализ, основная энергия в таком усилителе будет сконцентрирована в средней части линии, где расположен p — n-переход. Поэтому подключение источника постоянного смещения может быть без особых предосторожностей осуществлено у любого края линии, как показано на рис. 22, *б*.

Кроме трудностей технологического характера, связанных с изготовлением сложных туннельных p — n-переходов, при создании распределенных усилителей на туннельных диодах возникает весьма серьезная проблема устойчивости таких систем, непосредственно связанная с условиями согласования в широком диапазоне частот.

Авторы выражают глубокую благодарность В. В. Мигулину за ряд ценных советов и замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. L. Esaki, New phenomenon in narrow Ge p—n junction, Phys. Rev., 1958, 109, 603.
2. C. Mead, A note on tunnel emission, Proc. I. R. E., 1960, 48, 8, 1478.
3. J. V. Morgan, E. O. Kane, Observation of direct tunneling in Ge, Phys. Rev. Letters, 1959, 3, 10, 446.
4. В. Л. Бонч-Бруевич, К теории туннельного диода, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 12, 2033.
5. E. O. Kane, Theory of tunneling, J. Appl. Phys., 1961, 31, 1, 83.

6. I. A. Lesk, K. N. Holonyak, U. S. Davidson, M. W. Aarons, Ge and Si tunnel diodes design, operation and application, Wescon Convention Record IRE, 1959, 3, 3, 9.
7. R. Trambarulo, C. A. Burrus, Esaki diode microwave oscillators, Proc. I. R. E., 1960, 48, 10, 1776.
8. I. C. Green, E. W. Sard, Experimental tunnel diode mixer, Proc. I. R. E., 1961, 49, 1, 350.
9. E. Goto a. oth., Esaki diode high-speed logical circuits, IRE Trans. Electronic Comput., 1960, EC-9, 1, 25.
0. F. P. Heiman, 100-мс tunnel-diode ring counter, Proc. I. R. E., 1961, 49, 7, 1215.
1. H. S. Sommers, Tunnel diodes as high-frequency devices, Proc. I. R. E., 1959, 47, 7, 1206.
2. C. A. Burrus, Millimeter wave Esaki diode oscillators, Proc. I. R. E., 1960, 48, 12, 2024.
3. А. А. Андронов, А. А. Витт, С. Э. Хайкин, Теория колебаний, ГИФМЛ, 1959.
4. U. S. Davidsohn, Y. C. Hwang, G. B. Ober, Designing with tunnel diodes, pts 1,2, Electronic design, 1960, 3, 50.
5. M. E. Hines, High-gfrequency negative-resistance circuit principles for Esaki diode applications, Bell System Techn. J., 1960, 39, 3, 477.
6. R. P. Murray, Biasing methods for tunnel diodes, Electronics, 1960, 33, 23, 92.
7. K. K. N. Chang, Low-noise tunnel-diode amplifier, Proc. I. R. E., 1959, 47, 7, 1268.
8. В. И. Калинин, Г. М. Герштейн, Введение в радиофизику, ГТТИ, 1957.
9. G. Schaffner, A. compact tunnel-diode amplifier for ultrahigh frequencies, Wescon Convention Record IRE, 1960, 4, 2, 86.
0. L. Esaki, Fundamentals of Esaki tunnel diode in circuit applications, URSI XIII General Assembly, London, 1960.
1. A. G. Chunoweth, W. L. Feldman, R. A. Logan, Excess tunnel current in Si Esaki junctions, Phys. Rev., 1961, 121, 3, 684.
2. Н. А. Белова, А. Н. Ковалев, Экспериментальное исследование туннельного тока в узких германиевых p—n-переходах, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 1, 160.
3. J. J. Tiemann, Shot noise in tunnel diode amplifiers, Proc. I. R. E., 1960, 48, 8, 1418.
4. T. Yajima, L. Esaki, Excess noise in narrow Ge p—n junction, J. Phys. Soc. Japan, 1958, 13, 11, 1281.
5. И. И. Иванчик, К. теории вырожденного p—n-перехода, Физика твердого тела, 1961, 3, 1, 103.
6. Price, Radklif, The theory of tunnel diode, IBM J., 1959, 3, 4, 364.
7. B. C. Wilson, Tunneling current in Esaki diodes, Phys. Rev., 1961, 121, 4, 1070.
8. A. R. Cdawa, Tunnel-devices, Quart. Progr. Rept. Solid State Res. Inst. Technol., 1960, april, 4—7.
9. Б. М. Вул, А. П. Шотов, С. П. Тришечкина, Температурная зависимость туннельного тока в p—n-переходах, Физика твердого тела, 1961, 3, 2, 667.
0. H. S. Sommers, Jr. K. K. N. Chang, H. Nelson, R. Stienhoff, R. Schnitzler, Tunnel diode for low noise amplification, Wescon Convention Record IRE, 1959, 3, 3, 3.
1. E. G. Nielsen, Noise performance of tunnel diodes, Proc. I. R. E., 1960, 48, 11, 1903.
2. P. Penfield, Jr, Noise performance of tunnel-diode amplifiers, Proc. I. R. E., 1960, 48, 8, 1478.
3. La Rosa Richard, C. R. Wilhelmsen, Theoretical justification for shot-noise smoothing in the Esaki diode, Proc. I. R. E., 1960, 48, 11, 1903.
4. J. J. Tiemann, Tunnel diodes and their use as multifunctional circuit elements, 1960 Internat. solid-state circuits conference, N. Y., Lewis Winner, 1960, 8—9.
5. W. W. Gartner, Esaki or tunnel diode, pt 2, Semiconductor products, 1960, 3, 6, 36.
6. E. Miller, H. B. Yin, J. B. Schultz, Tunnel-diode radio-frequency amplifier, Wire and Radio Communs, 1960, 78, 10, 48.
7. H. A. Haus, R. B. Adler, Optimum noise performance of linear amplifiers, Proc. I. R. E., 1958, 46, 8, 1517.
8. K. K. N. Chang, The optimum noise performance of tunnel-diode amplifiers, Proc. I. R. E., 1960, 48, 1, 107.
9. J. J. Tiemann, Shot noise in tunnel-diode amplifiers, Proc. I. R. E., 1961, 49, 3, 622.
0. A. V. der Ziel, Noise of measure of lossy tunnel-diode amplifirers, Proc. I. R. E., 1960, 48, 7, 1321.
1. J. J. Sie, Absolutely stable hybrid coupled tunnel-diode amplifiers, Proc. I. R. E., 1960, 48, 7, 1321.

42. L. A. Lo Sasso, Tunnel diode as an interstage gain device, Proc. I. R. E., 1960, 48, 4, 793.
43. E. W. Sard, Tunnel (Esaki) diode amplifiers with unusually large bandwidths, Proc. I. R. E., 1960, 48, 3, 357.
44. E. D. Long, C. P. Womack, Designing tunnel diode $R-F$ amplifiers, Electronics, 1961, 34, 7, 120.
45. A. Yariv, J. S. Cook, Operation of an Esaki diode microwave amplifier, Proc. I. R. E., 1960, 48, 6, 1155.
46. W. J. Robertson, A broad-band hybrid coupled tunnel diode down converter, Proc. I. R. E., 1960, 48, 12, 2023.
47. R. F. Trambarulo, Esaki diode amplifiers at 7,11, and 26 kMc, Proc. I. R. E., 1960, 48, 12, 2022.
48. Tunneldiode- und Reaktanzverstärker für das VHF- und UHF-Gebiet, Electron Rundschau, 1961, 15, 3, 121.
49. S. B. Geller, P. A. Mantek, Tunnel diode large-signal simulation study, Proc. I. R. E., 1961, 49, 4.
50. H. R. Kaupp, D. R. Crosby, Calculated waveforms for tunnel diode locked pair, Proc. I. R. E., 1961, 49, 1, 146.
51. M. Schuller, W. W. Gärtner, Large-signal circuit theory of negative-resistance diodes, in particular tunnel diodes, Proc. I. R. E., 1961, 49, 8, 1268.

Поступила в редакцию
7 VI 1961

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1961 № 11

МНОГОТАКТНЫЕ МЕТОДЫ ИСПРАВЛЕНИЯ ОДИНОЧНЫХ И МНОГОКРАТНЫХ БЛИЗКО РАСПОЛОЖЕННЫХ ОШИБОК В ГРУППОВЫХ КОДАХ

А. Н. Радченко, Е. Т. Мирончиков

Предложен способ построения простых многотактных устройств для исправления нескольких близко расположенных ошибок в одном классе групповых кодов. Способ состоит в том, что контролируемое кодовое слово проходит по двум параллельным линиям задержки. Одна из них, имеющая логические взаимосвязи, пропускает только неупорядоченные импульсы помех. Другая — служит для временно́го согласования. Ее выход объединяется с выходом первой линии задержки схемой несоответствия, которая восстанавливает искаженные импульсы кодового слова. Приведены примеры схем корректоров для исправления ошибок.

Естественные, индустриальные и другие помехи, порожденные одним источником, как правило, коррелированы. Обычно их действие выражается в том, что они искажают группу смежных символов кодового слова. Искажение нескольких далеко отстоящих друг от друга символов значительно менее вероятно. К таким помехам относятся, например, грозовые разряды, замирания при радиоприеме и т. п. В дальнейшем будем предполагать, что многократные ошибки не выходят за пределы сравнительно небольшого произвольно расположенного участка кодового слова.

В качестве кодирующих и декодирующих устройств применяются схемы, построенные на регистрах сдвига с логическими связями. Впервые использование сдвигающих регистров с линейными обратными связями для исправления ошибок в кодах предложил Хаффмен [1]. Он показал возможность использования таких схем для исправления одиночных и некоторых двойных ошибок. Однако возможности исправления сгруппированных и большего числа независимых ошибок не были исследованы, а также не было предложено схемных решений.

Ниже рассмотрен способ исправления сгруппированных ошибок в двоичных кодах и предложен метод синтеза устройств, исправляющих ошибки в двоичных кодах. Кроме того, приведен анализ работы таких устройств.

Рассмотрим некоторые свойства сдвигающих регистров с логической обратной связью. Схема такого регистра изображена на рис. 1. Буквами D обозначены ячейки регистра. В простейшем случае они могут быть представлены линиями единичной задержки. Логическая обратная связь состоит из двух ветвей. Первая из них представляет линейную функцию, которая может быть осуществлена при помощи схем несоответствия, обозначенных значком $\oplus$ (сумматоры по модулю два). Блок этих схем выполняет роль выявителя четности. Выходная цепь выявителя четности возбуждается при условии, если возбуждено нечетное количество входных цепей. Хаффмен [2] предложил математический аппарат, пригодный для обозначения и преобразования линейных схем со сдвигающими регистрами и сумматорами по модулю два, и определил ряд свойств таких схем. Вторая ветвь обратной связи представлена нелинейной функцией φ, которая задается в булевой форме [3].

Рассмотрим сначала действие линейной части схемы, для чего предположим, что начальное состояние регистра есть 000. Если на вход схемы

подать импульс, то он через выявитель четности поступит в сдвигающий регистр. В момент прохождения отводов k, l, m регистра сдвига импульс будет вновь действовать на выявитель четности. В результате в регистре сдвига возникнет периодическая последовательность кодового кольца:

$$X\ldots\ 1110100111010 0\ldots\ .$$

В этом кодовом кольце представлены все трехчленные кодовые комбинации, кроме 000.

Рассмотрим теперь нелинейную схему φ, настроенную на одну из этих комбинаций. В зависимости от вида комбинации можно получить выходной импульс Y, отстающий от входного импульса на любое число

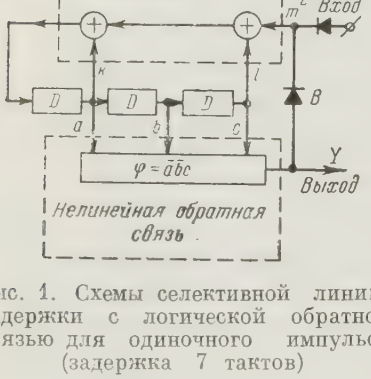


Рис. 1. Схемы селективной линии задержки с логической обратной связью для одиночного импульса (задержка 7 тактов)

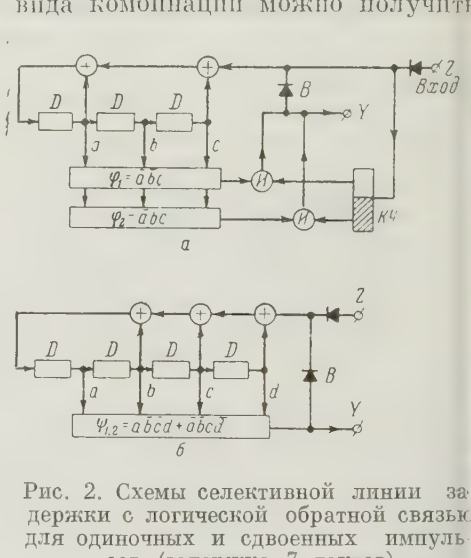


Рис. 2. Схемы селективной линии задержки с логической обратной связью для одиночных и сдвоенных импульсов (задержка 7 тактов)

тактов, но не более чем на период кольца. Для получения максимальной задержки нужно селектировать последнюю комбинацию кодового кольца. В конкретном случае (рис. 1) этой комбинацией является 100, следовательно, в терминах теории схем $\varphi = a\,\bar{b}\,c$. Выходной сигнал Y через диод B подается на выявитель четности и переводит схему в состояние 000 вместо 100. Таким образом, периодическая последовательность X оборвется и регистр вернется к стационарному режиму (000). Отметим, что при помощи рассматриваемых схем можно создавать экономичные линии задержки. Например, на линии задержки в 10 *мксек* можно получить задержку до 1023 *мксек*.

Можно осуществлять передачу с задержкой не только одиночных импульсов, но и следующих один за другим (сдвоенных) импульсов. Для такого расширения возможностей схемы воспользуемся свойством максимальных кодовых колец, которое заключается в том, что сумма по модулю два двух одинаковых колец в разных фазах (т. е. сдвинутых друг относительно друга) дает то же самое кодовое кольцо [2].

Благодаря линейным свойствам сдвигающих регистров действие сдвоенных импульсов можно рассматривать как действие двух независимых импульсов, а результат рассматривать как сумму кодовых колец, порожденных этими импульсами. Для рассматриваемого случая имеем

$$\begin{array}{l} Z_1\ldots 010000000\ldots \\ \oplus\ Z_2\ldots 001000000\ldots \\ \hline Z_{1,2}\ldots 011000000\ldots \end{array} \qquad \begin{array}{l} X_1\ldots 011101001110100\ldots \\ X_2\ldots 001110100111010\ldots \\ \hline X_{1,2}\ldots 010011101001110\ldots \end{array}$$

Отсюда следует, что для максимальной задержки первого из сдвоенных импульсов следует выделять из кодового кольца комбинацию 110, т. е. $\varphi = \bar{a}bc$. Соответствующая схема представлена на рис. 2, *а*. Эта схе-

ма при воздействии на вход одиночного импульса ведет себя так же, как и схема рис. 1. Отличие заключается в том, что селектор φ_1 присоединен ко входу через схему *И*. Последняя управляется двоичной пересчетной ячейкой (*КЧ*), контролирующей четность входного сигнала. Если на вход подан одиночный импульс, ячейка *КЧ* включает селектор φ_1; если импульс сдвоенный, подключается φ_2. При подаче на вход сдвоенных импульсов воспроизводится кодовое кольцо $X_{1,2}$, пока не будет селектирована комбинация кодового кольца 110. Сигнал от селектора φ_2 попадает на выход *Y* и одновременно через диод *В* будет воздействовать на блок сумматоров по модулю два. В результате, вместо очередной комбинации 101 на регистре появится комбинация 100. Одновременно импульс от *Y* попадает на *КЧ*, что приводит к переключению *Y* на селектор φ_1. Поскольку в этот момент на регистре находится комбинация 100, то тотчас же будет выдан второй задержанный импульс. Таким образом, схема может пропускать как одиночные, так и сдвоенные импульсы. Схемы рассмотренного вида будем называть селективными линиями задержки (*СЛЗ*), а совокупность импульсных комбинаций, пропускаемых такими схемами, будем называть характеристикой пропускания *СЛЗ*.

Имеется принципиальная возможность заменить ячейку *КЧ* ячейкой сдвигающего регистра и объединить ее с основным регистром, причем получим схему с той же самой характеристикой пропускания. Такая схема показана на рис. 2, *б*. При подаче на вход этой схемы одиночного импульса в ней возбуждается кодовое кольцо четырехчленных кодов

...10110001011000... ,

а при подаче на вход схемы сдвоенных импульсов — кодовое кольцо

...11101001110100... .

Таким образом, в этой схеме одиночный импульс и сдвоенные импульсы порождают различные частные кодовые кольца [3]. Это освобождает от необходимости вспомогательной коммутации селекторов, чем существенно упрощает схему. Внешне такая схема (см. рис. 2, *б*) становится подобной схеме рис. 1, но, в отличие от нее, различает одиночный входной импульс от сдвоенного и в соответствии с этим воспроизводит их с задержкой на 7 тактов. Отсюда следует простой способ увеличения числа комбинаций, пропускаемых селективной линией задержки: каждая комбинация, которая должна быть задержана на n тактов, должна возбуждать в схеме свое частное кодовое кольцо длиной n символов.

Для определения циклических свойств сдвигающих регистров с обратной связью можно воспользоваться методами теории конечных полей [4]. Для этого линейная часть схемы описывается многочленом от алгебраического оператора задержки D с коэффициентами из поля вычетов по модулю два. Так, линейную часть схемы, показанной на рис. 2,*б*, можно описать многочленом $F(D) = 1 \oplus D^2 \oplus D^3 \oplus D^4$. Такая запись указывает, что выходные сигналы со второй, третьей, четвертой ячеек регистра сдвига складываются по модулю два и записываются в первую ячейку. Многочлен $F(D)$ может раскладываться на неприводимые в поле вычетов по модулю два сомножители. Циклические свойства неприводимого сомножителя степени k_i записываются в виде суммы

$$\{1 + \mu_i(n_i)\}, \qquad (1)$$

где n_i — длина кодового кольца, соответствующего i-му сомножителю; $\mu_i = (2^{k_i} - 1)/n_i$ — число кодовых колец длины n_i у i-го сомножителя; 1 указывает на цикл, состоящий из одних нулей.

Циклические свойства сдвигающего регистра с обратной связью, описываемого приводимым многочленом, определяются произведением фор-

мальных сумм вида (1), соответствующих неприводимым сомножителям [4]. Проиллюстрируем более подробно проектирование селективных линий задержки на примере 15-тактной линии задержки, от которой потребуем передачи следующих комбинаций импульсов: 100, 110, 101, 111. Искомая схема должна обладать четырьмя кодовыми кольцами длиной по 15 символов, причем каждой перечисленной комбинации должно соответствовать свое кодовое кольцо. Рассматривая разложение $D^{15} \oplus 1$ на не-

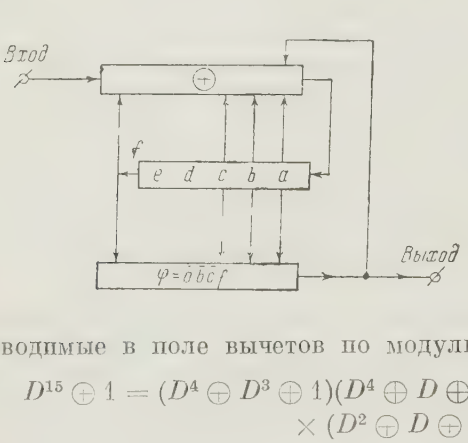


Рис. 3. Схема селективной линии задержки с логической обратной связью для группы произвольно расположенных импульсов (задержка 15 тактов)

приводимые в поле вычетов по модулю два сомножители:

$$D^{15} \oplus 1 = (D^4 \oplus D^3 \oplus 1)(D^4 \oplus D \oplus 1)(D^4 \oplus D^3 \oplus D^2 \oplus D \oplus 1) \times \times (D^2 \oplus D \oplus 1)(D \oplus 1), \quad (2)$$

можно заметить, что искомый многочлен будет состоять из двух сомножителей:

$$F(D) = (D^4 \oplus D^3 \oplus 1)(D^2 \oplus D \oplus 1) = D^6 \oplus D^3 \oplus D^2 \oplus D \oplus 1.$$

Циклические свойства каждого сомножителя определяются суммами

$$\{1 + \mu_1(n_1)\} = \{1 + 1\,(15)\},\ \{1 + \mu_2\,(n_2)\} = \{1 + 1\,(3)\}.$$

Произведение этих сумм даст циклические свойства выбранного сдвигающего регистра с обратной связью

$$\{1 + \mu_1(n_1)\}\{1 + \mu_2\,(n_2)\} = \{1 + \mu_1\,(n_1) + \mu_2\,(n_2) + \mu_1\mu_2\ \ НОД\,[n_1, n_2] \times \times (НОК\ [n_1, n_2])\} = \{1 + 1(15) + 1(3) + 3(15)\} = \{1 + 1(3) + 4(15)\},$$

где $НОД\ [n_1, n_2]$—наибольший общий делитель чисел n_1, n_2; $НОК\ [n_1, n_2]$—наименьшее общее кратное чисел n_1, n_2. Выбранный сдвигающий регистр с обратной связью воспроизводит четыре 15-членных кодовых кольца, причем по отношению к заданным импульсным комбинациям имеем следующее взаимно-однозначное соответствие:

1) 100—110011100100000,
2) 110 — 101010010110000,
3) 101 — 111111011101000,
4) 111 — 100110101111000.

Подчеркнутые комбинации необходимо селектировать схемой

$$\varphi = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e}f \cup \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}ef \cup \bar{a}\bar{b}\bar{c}de\bar{f} \cup \bar{a}\bar{b}\bar{c}def = \bar{a}\bar{b}\bar{c}f.$$

Схема линии задержки, пропускающей импульсные комбинации длиной $\leqslant 3$, представлена на рис. 3. Аналогично строятся схемы, обеспечивающие задержку различных комбинаций импульсов на большем отрезке. Характерно, что в процессе воспроизведения задержанной комбинации импульсов каждый раз за счет нелинейной обратной связи происходит

серия переходов от одного кольца к другому, последовательно возвращая схему к исходному состоянию. Эти переходы, вызванные выходными сигналами, повторяют действие входных сигналов, но вызывают смену кодовых колец в другом порядке. Несмотря на описательную сложность процессов, реализующие схемы получаются простыми и эффективными.

Рассмотренный класс схем обладает очень важным свойством. Оказывается, что некоторые комбинации импульсов совершенно не пропускаются такими схемами. Так, например, по отношению к схеме рис. 1 такими свойствами обладают следующие комбинации:

0000000 0110100 1101000 1011100
0001101 0111001 1100101 1010001
0011010 0101110 1110010 1001011
0010111 0100011 1111111 1001011.

Схема рис. 2 не пропускает 8 комбинаций:

0000000 1011100
0010111 1001011
0101110 1110010
0111001 1100101.

Для схемы рис. 3 можно перечислить 512 таких комбинаций.

Непосредственной проверкой нетрудно установить, что перечисленные комбинации представляют комбинации групповых кодов с хэммиговским расстоянием $d = 3$ и $d = 4$ соответственно для первой и второй схем. Таким образом, каждая из рассмотренных схем является своеобразным фильтром-пробкой, настроенным на комбинации определенного кода. Число комбинаций, которое не пропускает селективная линия задержки, определяется соотношением

$$M = \frac{2^{n-s+1}}{n} - 1,$$

Рис. 4. Структура устройства для исправления ошибок в коде

где n — по-прежнему длина частных кодовых колец, используемых для исправления ошибок; s — наибольшая длина пропускаемой импульсной комбинации.

Не менее важная особенность селективной линии задержки состоит в том, что при надлежащем управлении работой нелинейной обратной связи схема обладает суперпозиционными свойствами. Говоря иначе, результат совместного действия двух входных импульсных последовательностей (например, кодового слова и импульса шума) может рассматриваться как сумма результатов двух раздельно действующих сигналов. Таким образом, если какая-нибудь группа импульсов в комбинации кода искажена помехой, то на выходе селективной линии задержки появится только комбинация импульсов ошибки. Для кодового слова селективная линия задержки по-прежнему будет фильтром-пробкой.

Свойства рассмотренных схем можно использовать для исправления ошибок в групповых кодах. На рис. 4 показано такое устройство. Оно состоит из двух частей: селективной линии задержки (*СЛЗ*) и обычной линии задержки (*ЛЗ*). Первая линия, имеющая рассмотренную логическую структуру, пропускает только импульсы помех. Вторая линия осуществляет задержку всего кодового слова. Время задержки у этих двух линий одинаково и равно длине кодового слова. Выходы обеих частей объединены схемой несоответствия (*НС*) (сумматор по модулю два), что позволяет исправлять ошибки в кодовых словах.

Свойство суперпозиции характерно только для линейных схем. В рассматриваемом случае оно достигнуто искусственно за счет подавления действия нелинейного звена обратной связи на время совместной обработки

сигнала и шума. Подавление осуществляется схемой запрета, которая отключает селекторную цепь на время приема кода. В качестве примера на рис. 5 представлена более подробная схема, исправляющая одиночные ошибки в 127-членном коде. Здесь кодовое слово поступает с выхода приемного устройства (*ПРМ*) и вводится в запоминающий регистр (*ЗР*). Одновременно оно поступает на контрольный регистр (*КР*), представляющий

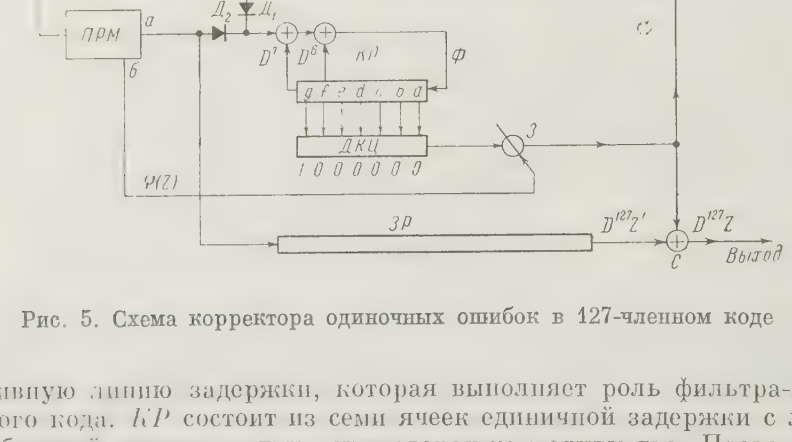


Рис. 5. Схема корректора одиночных ошибок в 127-членном коде

селективную линию задержки, которая выполняет роль фильтра-пробки для этого кода. *КР* состоит из семи ячеек единичной задержки с логической обратной связью на двух сумматорах по модулю два. После приема кодового слова все ячейки *КР* придут в нулевое состояние, если не произошло ошибок. Если один из импульсов кодового слова оказался искаженным, то последняя комбинация на ячейках *КР* однозначно определит место ошибки. Во время приема кодового слова с выхода *б ПРМ* снимается сигнал, запрещающий действие селектора *ДКЦ* (дешифратора конца цикла). Поэтому во время следующей работы *КР* селектор *ДКЦ* обнаружит конец цикла и выдаст сигнал исправления ошибки на сумматор *С*. Одновременно через диод $Д_1$ этот сигнал будет подан на *КР*, который возвратится в нулевое состояние. Диод $Д_2$ предотвращает попадание импульса коррекции в цепь *ЗР*. Обратная связь селективной линии задержки описывается формулой

$$\Phi = z \oplus f \oplus g \oplus \overline{\psi}(z)\,\bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d}\bar{e}\bar{f}g.$$

Аналогично строятся устройства, корректирующие близко расположенные или независимые многократные ошибки. Для этого необходимо подобрать селективную линию задержки с характеристикой пропускания, соответствующей ожидаемому характеру ошибок. Использованная в работе концепция, по-видимому, проще хэмминговской. Это не значит, что различия носят принципиальный характер. Всегда можно показать, что работу селективной линии задержки можно свести к хэмминговским проверкам на соответствие по матрице специального вида.

Символы кодовой последовательности можно рассматривать как коэффициенты полинома от алгебраического оператора задержки D. Тогда вопрос об искажении кодового слова сводится к вопросу о делимости этого полинома на полином кодирующего преобразователя. Полином от D, соответствующий неискаженному кодовому слову, делится нацело на полином кодирующего преобразователя. Полином, соответствующий искаженному кодовому слову, в результате такого деления порождает бесконечную периодическую последовательность символов кодового кольца, обрываемую лишь действием нелинейной обратной связи. Действие последней эквивалентно искусственному восстановлению делимости поли-

номов по формуле

$$\frac{N(D) \oplus D^n(N(D))}{F(D)}, \qquad (3)$$

где n — длина кодового кольца; $N(D)$ соответствует комбинации импульсов ошибки; $D^n(N(D))$ соответствует комбинации импульсов, сформированных в цепи нелинейной обратной связи, т. е. выходной комбинации селективной линии задержки. Из (3) следует, что операция исправления ошибок

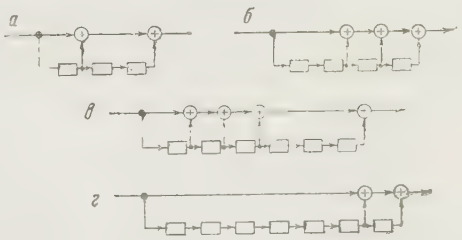


Рис. 6. Преобразователи информации в помехоустойчивый код:

а — для получения 7-членного кода с коррекцией одной ошибки (информационная емкость 2⁴); *б* — для получения 7-членного кода с коррекцией одной или двух смежных ошибок (информационная емкость 2³); *в* — для получения 15-членного кода с коррекцией ошибок вида X, XX, XOX, XXX на произвольно расположенном участке (информационная емкость 2⁹)

задерживается на n тактов. Анализ процессов, происходящих в селективной линии задержки при исправлении ошибок, проведем на примере линии, показанной на рис. 3. Ее включение изображено на рис. 4 и 5. Представим передаваемое кодовое слово

$$Z = 110101011000111$$

в виде полинома от D:

$$Z(D) = 1 \oplus D \oplus D^3 \oplus D^5 \oplus D^7 \oplus D^8 \oplus D^{12} \oplus D^{13} \oplus D^{14}.$$

Пусть в принятом кодовом слове искажены символы на седьмой и девятой позициях. Тогда принятую последовательность можно записать так:

$$Z'(D) = Z(D) \oplus N(D) = 1 \oplus D \oplus D^3 \oplus D^5 \oplus D^6 \oplus D^7 \oplus D^{12} \oplus D^{13} \oplus D^{14},$$

где $N(D)$ соответствует комбинации импульсов ошибки. Процессы, происходящие в селективной линии задержки при приеме искаженного кодового слова, описываются соотношением

$$T(D) = \frac{Z(D) \oplus N(D) \oplus D^n(N(D))}{F(D)}.$$

Для рассматриваемого примера имеем

$$T(D) = \frac{1 \oplus D \oplus D^3 \oplus D^5 \oplus D^6 \oplus D^7 \oplus D^{12} \oplus D^{13} \oplus D^{14} \oplus D^{15}(D^6 \oplus D^8)}{1 \oplus D \oplus D^2 \oplus D^3 \oplus D^6} =$$
$$= 1 \oplus D^2 \oplus D^3 \oplus D^5 \oplus D^9 \oplus D^{10} \oplus D^{11} \oplus D^{13} \oplus D^{14} \oplus D^{15} \oplus D^{17}.$$

Переходя опять к двоичным последовательностям, получим

$$T = 10110100011101\underline{1}0\underline{1000}00\underline{1}.$$

Селектируемые комбинации 101000 и 100000 соответствуют двум ошибкам. На этом примере можно проследить переход селективной линии задержки с одного кодового кольца на другое и затем в нулевое положение.

Образование кодовых слов производится также при помощи регистра сдвига с логическими связями. Кодирующие схемы для всех приведенных в работе случаев показаны на рис. 6.

Выводы. 1. Связывая промежуточные отводы линии задержки с ее входом через логические схемы, можно увеличить время задержки (за счет уменьшения числа импульсных комбинаций, пропускаемых линией).

2. Из множества импульсных комбинаций длины n можно выделить два подмножества: комбинации первого из них проходят селективную ли-

нию задержки без искажений; комбинации, принадлежащие к другому подмножеству, не проходят ее совсем.

3. Избирательные свойства селективной линии задержки можно использовать для исправления одиночных и многократных ошибок в групповых кодах. Для этого следует применять линии задержки, характеристика пропускания которых соответствует ожидаемому характеру ошибок.

4. Групповой код состоит из совокупности комбинаций, которые не проходят через селективную линию задержки. Характеризующий ее полином является делителем полиномов, соответствующих этим комбинациям. Соответственно, действие кодирующего преобразователя сводится к умножению множества полиномов, характеризующих комбинации, составленные из информационных символов, на полином кодирующего преобразователя.

5. Полученные многотактные схемы корректоров значительно проще известных одиотактных.

ЛИТЕРАТУРА

1. D. A. Huffman, IRE Trans., 1956, **IT-2,** September, 20.
2. Д. А. Хаффмен, Синтез линейных многотактных кодирующих схем, Сб. Теория передачи сообщений, под ред. В. И. Сифорова, ИЛ, 1957.
3. А. И. Радченко, Методы синтеза кодовых колец, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 11, 1783.
4. B. Elspas, IRE Trans., 1959, **CT-6**, March, 45.

Поступила в редакцию
16 I 1961

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1961 № 11

О ПРЕОБРАЗОВАНИИ СЛУЧАЙНЫХ СИГНАЛОВ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЛИНИЯХ

С. А. Ахманов, Р. В. Хохлов

Теоретически исследована задача о прохождении слабого сигнала со случайными амплитудой и фазой через нелинейную линию, возбуждаемую одновременно сигналом конечной амплитуды. Детально исследованы одномерные законы распределения амплитуды и фазы слабого сигнала в различных сечениях линии при отношении частот сигнала конечной амплитуды и слабого сигнала, близком к двукратному, и малой нелинейности. Показано, что фаза слабого сигнала на выходе может находиться лишь в одной из двух достаточно узких областей, середины которых отстоят друг от друга на π. Выведены условия, при которых относительные времена пребывания фазы в этих областях определяются исключительно статистическими характеристиками фазы на входе линии. Обсуждены возможности использования указанного обстоятельства для осуществления фазового фильтра.

ВВЕДЕНИЕ

Нелинейные волноводные системы, в частности системы с нелинейными реактивными параметрами, приобретают все большее значение в радиотехнике. В опубликованных до настоящего времени теоретических работах основное внимание уделено вопросам, связанным с распространением и взаимодействием регулярных сигналов в нелинейных волноводных системах ([1, 2]).

Значительный интерес представляют аналогичные задачи, относящиеся к случайным сигналам,— сигналам со случайными амплитудой и фазой. Настоящая работа посвящена рассмотрению задачи о прохождении слабого случайного сигнала через нелинейную линию передачи, возбуждаемую одновременно регулярным сигналом конечной амплитуды *. Естественно ожидать, что воздействие сигнала конечной амплитуды может привести к существенной модификации статистических характеристик амплитуды и фазы случайного сигнала; последнее может представлять интерес с точки зрения задачи фильтрации сигналов. В случае малой нелинейности и малых потерь уравнения, описывающие амплитуду и фазу волны, распространяющейся вдоль нелинейной линии, аналогичны укороченным уравнениям, широко используемым в теории колебаний [3]. В рассматриваемой задаче уравнения, описывающие амплитуду и фазу слабого сигнала, оказываются по существу символическими дифференциальными уравнениями, поскольку для наиболее интересного случая весьма слабых сигналов необходим учет собственных тепловых шумов (флуктуационной внешней силы), распределенных вдоль линии. В настоящей работе проанализирован как случай, когда воздействие собственных шумов линии приводит лишь к малым флуктуациям амплитуды и фазы распространяющейся волны, так и случай, когда существенными оказываются большие флуктуации фазы.

* Под конечными амплитудами понимаются амплитуды, достаточные для получения заметных нелинейных эффектов.

1. ВЫВОД ОСНОВНЫХ УРАВНЕНИЙ

Рассмотрим нелинейную линию передачи, эквивалентная схема элементарной ячейки которой представлена на рис. 1.

Распределенная емкость и распределенная проводимость линии являются функциями напряжения, так что связь погонного заряда с напряжением описывается соотношением $Q(V) = CV + DV^2$, а $G = G_0F_0(V)$, где $F_0(V)$ конкретизировано ниже. Отметим пока только, что при малых напряжениях функция $F_0(V)$ равна единице ($F_0(0) = 1$). Параллельно проводимости G включен генератор тока I, описывающий тепловые шумы, генерируемые проводимостью G. Дифференциальные уравнения, описывающие ток и напряжение в линии, имеют вид

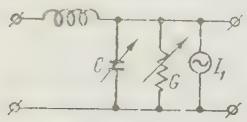


Рис. 1. Эквивалентная схема элементарной ячейки нелинейной линии

$$-\frac{\partial V}{\partial z} = L\frac{\partial J}{\partial t}, \quad -\frac{\partial J}{\partial z} = \frac{\partial Q}{\partial t} + GV + I(t, z). \tag{1}$$

Корреляционная функция $I(t, z)$ имеет вид [4]

$$\overline{I(t, z)\, I(t+\tau, z+s)} = \frac{2kT}{\pi}\delta(s)\int_0^\infty G_0(\Omega)\cos\Omega\tau\, d\Omega. \tag{2}$$

В подынтегральном выражении (2) вместо G фигурирует G_0, поскольку учет собственных шумов линии наиболее существен в режиме слабых сигналов.

Удобно перейти от уравнений (1) к одному уравнению второго порядка. Исключая ток J, можно получить уравнение

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - L\frac{\partial^2 Q}{\partial t^2} - L\frac{\partial GV}{\partial t} - L\frac{\partial I}{\partial t} = 0. \tag{3}$$

Пусть на вход линии поданы относительно слабый сигнал с несущей частотой ω и с медленно изменяющимися амплитудой и фазой и сильный сигнал частоты 2ω («накачка»), так что на входе ($z = 0$) напряжение описывается выражением

$$V = V_0(t)\sin[\omega t + \varphi_0(t)] + V_p\sin 2\omega t, \tag{4}$$

где $V_0(t)$ и $\varphi_0(t)$ — медленно меняющиеся функции времени. Отметим, что представление напряжения при $z = 0$ в форме (4) не исключает возможности рассмотрения случаев, когда точная кратность частот сигнала и накачки отсутствует. В этих случаях фаза $\varphi_0(t)$ содержит аддитивный член вида $\Delta_1 t$, где Δ_1 — отклонение частоты сигнала от половины частоты накачки.

Пусть в рассматриваемой линии фазовая скорость слабо зависит от частоты при изменении последней от нуля до 2ω и сильно изменяется при дальнейшем ее увеличении. В этих условиях эффективно взаимодействовать могут лишь волны с частотами, не превышающими 2ω.

Введем новые переменные:

$$\zeta = t + \frac{z}{u}, \quad \eta = t - \frac{z}{u}, \tag{5}$$

где u — фазовая скорость на частоте накачки. Тогда если в рассматриваемой линии преобладают прямые волны, а коэффициент нелинейности D и проводимость G — малы, решение уравнения (3) можно представить в виде

$$V = V(\eta, \varepsilon\zeta), \tag{6}$$

где ε — малый параметр; $DV/C \sim \varepsilon$ и $G_0/\omega C \sim \varepsilon$. Переходя в уравнении (3)

к координатам ζ, η, принимая во внимание форму решения (6) и пренебрегая величинами второго порядка малости относительно ε, получим уравнение следующего вида:

$$-\frac{4}{u^2}\frac{\partial^2 V}{\partial\zeta\,\partial\eta}+\left(\frac{1}{u^2}-LC\right)\frac{\partial^2 V}{\partial\eta^2}-LD\frac{\partial^2 V}{\partial\eta^2}-L\frac{\partial GV}{\partial\eta}\quad L\dot{I}\left[\frac{u}{2}(\zeta-\eta);\frac{1}{2}(\zeta+\eta)\right]. \quad (7)$$

В новых переменных функция корреляции случайной силы имеет вид

$$\overline{\dot{I}(\zeta_1,\eta_1)\dot{I}(\zeta,\eta)}=\frac{2kT}{\pi}\delta\left[\frac{u}{2}(\zeta_1-\zeta+\eta-\eta_1)\right]\times$$

$$\times\int_0^\infty\Omega^2G_0(\Omega)\cos\frac{\Omega}{2}(\zeta_1+\eta_1-\zeta-\eta)\,d\Omega. \quad (8)$$

При граничных условиях (4) общая форма решения (6) может быть конкретизирована:

$$V=V_1(\varepsilon\zeta,\varepsilon\eta)\sin\Phi+V_p\sin 2\omega\eta, \quad (9)$$

где

$$\Phi=\omega\eta+\varphi(\varepsilon\zeta,\varepsilon\eta). \quad (10)$$

Пренебрегая реакцией сигнала на волну накачки, а также ее затуханием*, полагаем $V_p=\text{const}$. Подставляя (9) в (7), пренебрегая членами порядка ε^2, умножая полученное таким образом уравнение на $\cos\Phi$ и $\sin\Phi$ и усредняя его члены после этого по периоду $2\pi/\omega$, можно получить следующие укороченные уравнения, описывающие поведение медленно меняющихся амплитуды V_1 и фазы φ:

$$\frac{\partial V_1}{\partial\zeta}-\beta V_pV_1\cos 2\varphi+\delta(V_1)V_1+F_1(\zeta)=0, \quad (11а)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}+\gamma+\beta V_p\sin 2\varphi+\frac{1}{V_1}F_2(\zeta)=0. \quad (11б)$$

Здесь

$$\beta=\frac{LDu^2\omega}{4};\quad \gamma=\frac{\omega}{4}u^2\left(\frac{1}{u^2}-LC\right);$$

$$\delta(V_1)=\frac{G_0Lu^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}F_0(V_1\sin\Phi)\sin^2\Phi\,d\Phi. \quad (12)$$

Параметр γ позволяет учесть слабую дисперсию в линии в диапазоне $0-2\omega$. Случайные силы $F_1(\zeta)$ и $F_2(\zeta)$ равны

$$F_{1,2}=\frac{Lu^2}{2\omega}\frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}\dot{I}\begin{Bmatrix}\cos(\omega\eta+\varphi)\\ \sin(\omega\eta+\varphi)\end{Bmatrix}d\eta. \quad (13)$$

Удобно представить $F_{1,2}$ в виде

$$F_{1,2}=\bar{F}_{1,2}+f_{1,2}(\zeta);\ \overline{f_{1,2}(\zeta)}=0. \quad (14)$$

Средние значения случайных сил, а также статистические характеристики функций $f_{1,2}(\zeta)$ можно определить, пользуясь приемами, разработанными в теории флуктуаций автоколебательных систем [5, 6].

* Последнее возможно при соответствующем выборе закона дисперсии проводимости G.

Имеем

$$F_1 = \frac{kT}{2\pi^2}\frac{G_0}{C^2}\frac{\omega}{u}\frac{1}{V_1}, \quad \overline{F}_2 = 0,$$

$$\overline{f_1(\zeta)\, f_2(\zeta_1)} = 0, \quad \overline{f_1(\zeta)\, f_1(\zeta_1)} = \overline{f_2(\zeta)\, f_2(\zeta_1)} = \frac{kT}{2\pi^2}\frac{G_0}{C^2}\frac{\omega}{u}\delta(\zeta - \zeta_1). \qquad (15)$$

При представлении корреляционных функций в правых частях последних соотношений в виде δ-функций принято во внимание, что постоянная $|\beta|V_p$, характеризующая инерционность фазы по отношению к переменной ζ, значительно больше величины $1/2\omega$, которая характеризует интервал корреляции функций $f_{1,2}$.

Уравнения (11) следует решать при граничных условиях, соответствующих (4):

$$V = V_0(\eta), \quad \varphi = \varphi_0(\eta) \text{ при } \zeta = \eta. \qquad (16)$$

Уравнения (11) являются нелинейными символическими уравнениями. Их решение в общем случае представляет значительные трудности. Рассмотрим поэтому вначале случай «бесшумной» линии, когда флуктуационные внешние силы $F_{1,2}$ равны нулю.

2. ХАРАКТЕРИСТИКИ АМПЛИТУДЫ И ФАЗЫ СЛАБОГО СИГНАЛА В БЕСШУМНОЙ ЛИНИИ

В отсутствие внешних сил уравнение для фазы (11б) может быть решено независимо от уравнения для амплитуды; наоборот, характер изменения амплитуды существенно зависит от поведения фазы. Характер решения фазового уравнения определяется соотношением параметров βV_p и γ [7]. При $|\gamma| > \beta V_p$ фаза является периодической функцией ζ — это соответствует пространственным биениям в линии. При $\beta V_p > |\gamma|$ фаза с ростом ζ апериодически стремится к значению $\varphi_{уст}$, определяемому соотношениями

$$\sin 2\varphi_{уст} = -\frac{\gamma}{\beta V_p}, \qquad (17)$$

$$\cos 2\varphi_{уст} > 0. \qquad (18)$$

Последний случай представляет наибольший интерес, поскольку распространение сигнала вдоль линии может сопровождаться при этом экспоненциальным нарастанием амплитуды. Его рассмотрением мы и ограничимся в дальнейшем. Из (17) и (18) следует, что в интервале $-\pi < \varphi \leqslant \pi$ существуют две устойчивые фазы, сдвинутые на π друг относительно друга. Выбор того или иного устойчивого состояния определяется в отсутствие внешних сил исключительно краевыми условиями. Области притяжения устойчивых состояний на линии краевых фаз разделены корнями уравнения (17), в которых $\cos 2\varphi < 0$. Будем называть для краткости эти области в дальнейшем областями I и II.

Особенно просто выглядит решение фазового уравнения (11б) в случае равенства фазовых скоростей волн накачки и сигнала ($\gamma = 0$). Имеем для него

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg}\left[e^{2\beta V_p(\eta-\zeta)}\operatorname{tg}\varphi_0(\eta)\right] = \operatorname{arc\,tg}\left[e^{-4\beta V_p\frac{z}{u}}\operatorname{tg}\varphi_0\left(t-\frac{z}{u}\right)\right]. \qquad (19)$$

Если выполнено условие

$$\beta V_p \cos 2\varphi_{уст} > \delta(0), \qquad (20)$$

то на расстояниях от входа

$$z_0 = \frac{u}{\sqrt{(\beta V_p)^2 - \gamma^2}}, \qquad (21)$$

где фаза достигает значения, близкого к установившемуся, начинается

рост амплитуды, описываемый уравнением

$$\frac{\partial V_1}{\partial z} - \beta V_p V_1 \cos 2\varphi + \delta(0) V_1 = 0. \tag{22}$$

Решение этого уравнения в случае $\gamma = 0$ имеет вид

$$V_1 = V_0\left(t - \frac{z}{u}\right)\sqrt{\cos^2\varphi_0\left(t - \frac{z}{u}\right) + \sin^2\varphi_0\left(t - \frac{z}{u}\right)e^{-8\beta V_p \frac{z}{u}}} \times$$
$$\times \exp\left[\beta V_p - \delta(0)\right]\frac{2z}{u}. \tag{23}$$

В реальных случаях, разумеется, неограниченное нарастание амплитуды, предсказываемое (23), не имеет места. Факторами, ограничивающими экспоненциальное нарастание амплитуды, могут быть либо реакция волны сигнала на волну накачки (этот случай рассмотрен в [3]), либо изменение фазовой скорости нарастающей волны с увеличением амплитуды, в результате чего нарушаются условия синхронизма фазовых скоростей волн сигнала и накачки *, либо, наконец, нелинейное поглощение. Рассмотрим этот последний случай. Для простоты можно принять, например,

$$\delta(V_1) = \delta(0)\left[1 + \frac{V_1^2}{V_{\text{п}}^2}\right], \tag{24}$$

где $V_{\text{п}}$ — параметр, характеризующий уровень «срабатывания» нелинейности. Тем самым, зависимость проводимости от напряжения $G = G_0 F(V)$ конкретизирована.

Величина установившейся амплитуды $V_{\text{уст}}$ определится из соотношения

$$\beta V_p \cos 2\varphi_{\text{уст}} = \delta(0)\left[1 + \frac{V_{\text{уст}}^2}{V_{\text{п}}^2}\right]. \tag{25}$$

Полученные результаты позволяют проанализировать прохождение через рассматриваемую систему сигнала, амплитуда и фаза которого модулированы случайным образом. Важно подчеркнуть прежде всего, что если на входе амплитуда и фаза случайного сигнала являются случайными функциями одной переменной — времени t, то в линии они являются случайными функциями двух переменных — t и z, причем статистические характеристики по t и z могут быть существенно различными. Будем считать, что $V_0(t)$ и $\varphi_0(t)$ являются стационарными случайными процессами и при $z = 0$ для них заданы одномерные законы распределения и корреляционные функции. Из (19) и (23) видно, что амплитуда V_1 и фаза φ являются неоднородными случайными функциями z и стационарными функциями t. Одномерная функция распределения фазы $W_z(\varphi)$ может быть легко вычислена по правилу замены переменных, если известна $W_0(\varphi_0)$. Так, например, для $\gamma = 0$ и $W_0(\varphi_0) = 1/2\pi$

$$W_z(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{8\beta V_p \frac{z}{u}}}{\cos^2\varphi + e^{8\beta V_p \frac{z}{u}}\sin^2\varphi}. \tag{26}$$

Легко видеть, что с ростом z функция $W_z(\varphi)$ существенно модифицируется (см. рис. 2), превращаясь в пределе в два δ-образных выброса при $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi$. Вероятности установления одной из двух возможных фаз $\varphi_{\text{уст}}$ будут определяться исключительно вероятностями попадания входной фазы φ_0 в области притяжения I или II.

* Для теоретического рассмотрения этого механизма ограничения следует учесть члены более высокого порядка (по крайней мере третьего) в выражении для $Q(V)$.

Амплитуда V_1, так же как и фаза, является неоднородной случайной функцией z; пользуясь (19) и (22) и задаваясь конкретным видом $W_0(V_0)$, можно рассчитать статистические характеристики V_1 в любом сечении z. Нетрудно видеть, что независимо от вида $W_0(V_0)$ одномерная функция распределения амплитуды V_1 при $z \to \infty$ стремится к δ-функции около установившегося значения, определяемого из (25). На рис. 3 в качестве примера приведены графики функций распределения $W_z(V_1/V_{уст})$ для различных зна-

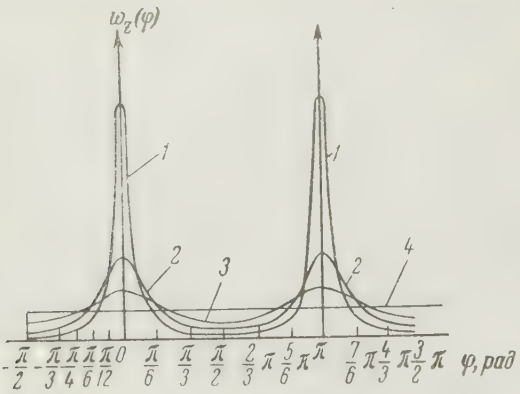


Рис. 2. Одномерные функции распределения фазы при различных $l = 4\beta V_p \frac{z}{u}$ для случая, когда одномерный закон распределения краевой фазы — равномерный:

1 — $l = 2$; 2 — $l = 1$; 3 — $l = 0{,}5$; 4 — $l =$

чений параметра $r = 4[\beta V_p \cos 2\varphi_{уст} - \delta(0)]\frac{z}{u}$; при этом одномерная функция распределения амплитуды на входе ($z = 0$) взята релеевской (см. также [8]).

Таким образом, несмотря на то, что краевые амплитуды и фаза пробегают непрерывный ряд значений, фаза выходного сигнала может принимать лишь одно из двух дискретных значений, а амплитуда на выход-

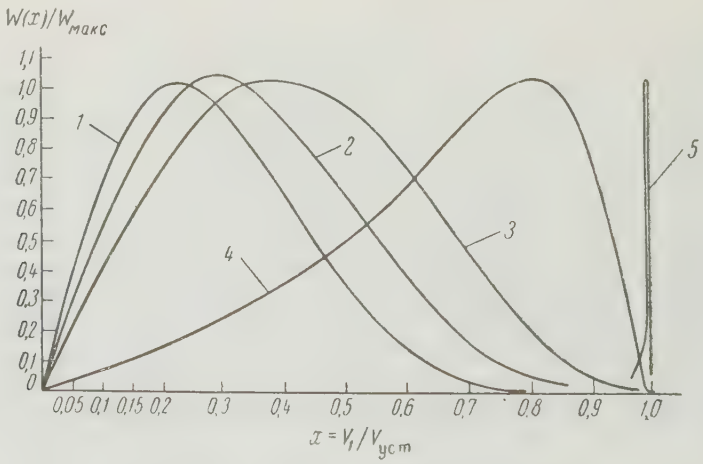


Рис. 3. Одномерные функции распределения амплитуды при различных r. Отношение $V^2_{уст}/\sigma^2 = 5$; одномерный закон распределения краевой амплитуды — релеевский (на входе только шум с дисперсией σ^2):

1 — $r = 0{,}01$; 2 — $r = 0{,}5$; 3 — $r = 1$; 4 — $r = 2{,}5$; 5 — $r = 10$

при соответствующем подборе нелинейности практически вообще не зависит от амплитуды на входе. Сказанное означает, что в нелинейной волноводной системе могут быть созданы условия, при которых флуктуации входного сигнала проявляются на выходе лишь в изменении вероятностей относительных времен пребывания выходного сигнала в одном из двух устойчивых состояний, характеризуемых регулярным

амплитудами и фазами и отличающимися лишь значением установившейся фазы, т. е. одновременно с усилением в системе происходит «обработка» сигнала.

На основе измерения относительных времен пребывания выходного сигнала в указанных устойчивых состояниях можно получить информацию о функции распределения фазы входного сигнала, поэтому рассматриваемая волноводная система может быть использована для построения фазового фильтра, в котором критерием наличия сигнала является изменение относительного времени пребывания выходной фазы в одном из возможных состояний. Для эффективной работы такого фильтра необходимо, чтобы выходное состояние определялось исключительно краевыми условиями; однако собственные шумы линии, вообще говоря, также влияют на статистику выходных состояний и приводят, таким образом, к потерям информации, передаваемой со входа. В следующем параграфе этот вопрос рассмотрен более подробно.

3. СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ФАЗЫ СЛАБОГО СИГНАЛА В ШУМЯЩЕЙ ЛИНИИ

С точки зрения задачи, поставленной в конце § 2, наибольший интерес приобретает исследование укороченного уравнения для фазы (11) со случайной силой. Действительно, флуктуации амплитуды в принципе не влияют на результаты, получаемые при измерениях относительных времен пребывания выходного сигнала в одном из устойчивых состояний. Иное положение имеет место с флуктуациями фазы. Как видно из структуры фазового уравнения (аналогичного по существу уравнению движения броуновской частицы в потенциальном поле), воздействие флуктуационной силы может приводить к 1) «размытию» фазовых траекторий и, в частности, флуктациям фазы вблизи установившихся значений; 2) переходам фаз из области I в II и обратно. Очевидно, что малые флуктуации фазы вблизи динамических фазовых траекторий и установившихся значений не изменяют принципиально идеализированной картины, описанной в § 2, поскольку усредненные фазовые траектории определяются краевыми условиями, а флуктуационная сила приводит лишь к их размытию. Расчет размытия можно легко провести, если разбить фазу на регулярную и флуктуационную части, линеаризировать уравнения относительно флуктуаций и использовать аппарат корреляционной теории. Переходы же фазы из одной области притяжения в другую играют принципиальную роль, поскольку при этом вероятности нахождения выходной фазы в устойчивых состояниях будут определяться не только краевыми условиями, но и интенсивностью флуктуационной силы. Последнее означает, что обработка сигнала в шумящей линии сопровождается, вообще говоря, потерей информации о функции распределения краевой фазы. В качестве количественной меры, характеризующей потерю информации, удобно использовать величину

$$M = \frac{P_1(z) - P_2(z)}{P_1(0) - P_2(0)} \leqslant 1, \tag{27}$$

где

$$P_{1,2}(z) = \int\limits_{I,II} W_z(\varphi)\, d\varphi; \quad P_{1,2}(0) = \int\limits_{I,II} W_0(\varphi_0) d\varphi_0. \tag{28}$$

В бесшумной линии $M = 1$. В шумящей линии параметр M является функцией координаты z, отношения среднеквадратичной амплитуды на входе $\sqrt{V_0^2}$ к интенсивности флуктуационной силы и т. п. В предельном случае достаточно интенсивной случайной силы даже при не очень больших z $P_1(z) \sim P_2(z)$ и $M \sim 0$, поскольку, как это следует из самых общих соображений, вероятности нахождения фазы в устойчивых состояниях

имеют тенденцию к выравниванию. Величину M можно представить также в виде

$$M = \frac{\Delta P(z)}{\Delta P(0)} = \frac{\Delta P(0) - N}{\Delta P(0)} = 1 - \frac{N}{\Delta P(0)},$$

где N характеризует выравнивание вероятностей под действием случайной силы: $N \leqslant \Delta P(0)$.

Весь процесс распространения сигнала в рассматриваемой линии может быть разбит на два этапа. На первом этапе фазовые траектории стягиваются к устойчивым состояниям. Амплитуда на протяжении этого этапа является почти неизменной, оставаясь равной, по порядку, амплитуде на входе системы. Второй этап характеризуется экспоненциальным нарастанием амплитуды колебаний и установлением ее стационарного значения.

Из уравнения (11б) следует, что интенсивность случайного воздействия на фазу при заданном уровне шумов в линии тем больше, чем меньше амплитуда сигнала V_1. Это означает, что вероятности переходов максимальны на первом этапе, когда амплитуда равна приблизительно V_0.

Ограничимся оценкой минимальной амплитуды входного сигнала, для которой переходы еще достаточно редки, так что относительные времена пребывания выходной фазы в стационарных состояниях определяются в основном краевыми условиями ($M \sim 1$). Именно этот случай представляет интерес для выяснения предельных возможностей волноводного фазового фильтра. Для проведения оценки заменим амплитуду V_1 в фазовом уравнении (11б) ее среднеквадратичным значением на входе V_0. Хотя такая замена правомерна в какой-то степени только на первом этапе установления, целесообразно рассмотреть решения фазового уравнения с постоянным значением V_1 для большего интервала переменной ζ.

Итак, рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} + \gamma + \beta V_p \sin 2\varphi + \frac{1}{V_0} F_2(\zeta) = 0. \tag{29}$$

Это уравнение является символическим, оно описывает поведение случайной фазы в зависимости от ζ и параметров. Так как внешняя сила F_2 является δ-коррелированной, целесообразно перейти от (29) к уравнению типа Эйнштейна — Фоккера. Оно имеет вид

$$\frac{\partial W}{\partial \zeta} + \frac{\partial S}{\partial \varphi} = 0, \tag{30}$$

где S — поток вероятности сквозь сечение φ;

$$S(\varphi) = -(\gamma + \beta V_p \sin 2\varphi) W - \frac{kT}{4\pi} \frac{G_0}{C^2} \frac{\omega}{u} \frac{1}{V_0^2} \frac{\partial W}{\partial \varphi}. \tag{31}$$

Удобно иметь в виду аналогию между процессами установления стационарного распределения вероятности фазы и движения броуновской частицы в потенциальном поле U вида

$$U(\varphi) = \gamma\varphi - \frac{1}{2} \beta V_p \cos 2\varphi. \tag{32}$$

На первом этапе устанавливается квазистационарное распределение вероятностей фазы с двумя острыми максимумами. Длину этого этапа можно оценить, не принимая во внимание действия флуктуационных сил (см. формулу (21)). Наиболее интенсивно на первом этапе происходят переходы на участке, прилегающем ко входу, где вероятность нахождения фазы в окрестности границы (сепаратрисы) между областями I и II еще относительно велика. На этом участке достаточно небольшого случайного толчка в сторону границы, чтобы «потенциальный барьер» был преодолен.

Вместе с тем следует рассмотреть также переходы фазы из области I в II и обратно, когда одномерный закон распределения фазы уже имеет

выраженные максимумы вблизи устойчивых фаз; результаты такого рассмотрения позволяют, в частности, оценить требование к длине системы. Отметим, что задачи последнего типа (такие переходы, в отличие от переходов первого типа, можно назвать «глубинными») рассмотрены в литературе [6, 10, 11]. Для конкретных оценок интенсивностей переходов следует задаться выражением для функции распределения входной фазы $W_0(\varphi_0)$. Для случая, когда на входе линии помимо шума присутствует слабый сигнал

$$V_s = A \cos(\omega t + \varphi_1), \tag{33}$$

одномерная функция распределения фазы напряжения, являющегося суперпозицией сигнала и шума (с дисперсией σ^2), при малых отношениях сигнал/шум имеет вид [9]

$$W_0(\varphi_0) = \frac{1}{2\pi} + \frac{A}{\sigma} \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cos(\varphi_0 - \varphi_1). \tag{34}$$

Оценим интенсивности переходов фаз. Для простоты ограничимся случаем $\gamma = 0$.

При малых интенсивностях случайных сил переходы через границу областей притяжений происходят из состояний, близких к этой границе: $\varphi \simeq \varphi_{гр} = \pm \pi/2$. Поэтому в окрестности границы в уравнении (30) можно положить $\sin 2\varphi \simeq -2\varphi_2$, где $\varphi_2 = \varphi - \varphi_{гр}$, так что положительные φ_2 соответствуют одной области притяжения, а отрицательные — другой. Уравнение (29) приобретает, таким образом, вид

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \zeta} - 2\beta V_p \varphi_2 + \frac{1}{V_0} F_2(\zeta) = 0. \tag{35}$$

Решая его при граничных условиях

$$\varphi = \varphi_0 \text{ при } \zeta = \eta, \tag{36}$$

можно получить

$$\varphi_2 = (\varphi_0 + \varphi_{сл}) \exp\left(4\beta V_p \frac{z}{u}\right), \tag{37}$$

где

$$\varphi_{сл} = \frac{1}{V_0} \int_0^{2\frac{z}{u}} e^{-2\beta V_p \xi} F_2(\xi)\, d\xi. \tag{38}$$

Член $\varphi_{сл}$ в (37) обязан своим происхождением флуктуационным силам и описывает возмущения фазовых траекторий, проходящих вблизи границы. Из (38) легко получить основные статистические характеристики $\varphi_{сл}$:

$$\overline{\varphi}_{сл} = 0, \quad \overline{\varphi^2_{сл}} = \frac{\overline{F_2^2}}{V_0^2} \frac{1}{4\beta V_p} \left(1 - e^{-8\beta V_p \frac{z}{u}}\right). \tag{39}$$

Аппроксимируя закон распределения $\varphi_{сл}$ нормальным, имеем

$$W(\varphi_{сл}, z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \overline{\varphi^2_{сл}}(z)}} \exp\left(-\frac{\varphi^2_{сл}}{2\overline{\varphi^2_{сл}}(z)}\right). \tag{40}$$

Вероятность попадания фазы, имеющей на входе значение φ_0, в «чужую» область притяжения равна

$$\int_{\varphi_0} W(\varphi_{сл}, z)\, d\varphi_{сл}. \tag{41}$$

При достаточно больших значениях z, когда $z \gg \frac{1}{8}\frac{u}{\beta V_p}$, эта вероятность равна

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{\frac{\varphi_0}{B}}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy, \tag{42}$$

где

$$B = \frac{\sqrt{F_2^2}}{2V_0} \frac{1}{\sqrt{\beta V_p}}. \tag{43}$$

Рассмотрим случай, когда фаза входного сигнала оптимальна, так что значение φ_1 в (33) равно нулю. В этом случае распределение входной фазы φ_0 в окрестности границы можно представить в виде

$$W_0(\varphi_0) = \frac{1}{2\pi} + \frac{A}{\sigma}\frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\varphi_0. \tag{44}$$

Тогда

$$\frac{N}{\Delta P(0)} = 2 \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi d\varphi \int\limits_{\frac{\varphi}{B}}^{\infty} e^{-y^2/2}\, dy \simeq B^2. \tag{45}$$

Обсуждение этого соотношения проведено ниже.

Закон выравнивания вероятностей нахождения фазы в областях I и II для случая, когда уже установились квазистационарные распределения с двумя острыми максимумами около корней уравнений (17) — (18), можно определить следующим образом.

Для стационарного распределения вероятности фазы поток вероятности через потенциальный барьер из области I в область II S_+ и обратный поток S_- равны друг другу (динамическое равновесие). Величины этих потоков в случае малых интенсивностей случайных сил и при условии $\gamma \ll \beta V_p$ определяются соотношением (см. [6])

$$S_\pm = \frac{1}{2\pi}\beta V_p \exp\left\{-\frac{1}{2\pi B^2}\right\}, \tag{46}$$

где B определяется формулой (43). Если вероятности нахождения изображающей точки в областях I и II $P_{1,2}$ не равны друг другу, процесс их выравнивания описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \frac{dP_1}{d\zeta} &= \frac{1}{2}S_-(P_2 - P_1) + \frac{1}{2}S_+(P_2 - P_1), \\ \frac{dP_2}{d\zeta} &= \frac{1}{2}S_-(P_1 - P_2) + \frac{1}{2}S_+(P_1 - P_2). \end{aligned} \tag{47}$$

Уравнения (47) должны быть решены при граничных условиях, заданных в конце первого этапа установления фазы. Подставляя в (47) выражения для потоков (46) и учитывая, что при граничных условиях, заданных при фиксированных z, движение по ζ эквивалентно движению вдоль координаты z, имеем

$$\frac{dP_1}{dz} = \frac{\beta V_p}{2\pi u} e^{-\frac{1}{2\pi B^2}} [P_1 - P_2], \quad \frac{dP_2}{dz} = \frac{\beta V_p}{2\pi u} e^{-\frac{1}{2\pi B^2}} [P_2 - P_1]. \tag{48}$$

Длина, на которой происходит выравнивание вероятностей, равна

$$L = \frac{2\pi u}{\beta V_p} e^{\frac{1}{2\pi B^2}}. \tag{49}$$

Таким образом, длина, на которой глубинные переходы приводят к выравниванию вероятностей, значительно превышает длину, на которой фазовые траектории стягиваются к устойчивым состояниям при выполнении условия

$$e^{-\frac{1}{2\pi B^2}} \ll 1, \tag{50}$$

т. е. при выполнении условия (50) в системе конечной длины переходы из окрестности одного устойчивого состояния через потенциальный барьер в окрестность другого весьма редки. Из (45) и (50) видно, что условия малости частоты переходов из состояний, близких к сепаратрисе на фазовой плоскости, и из состояний, находящихся в минимумах потенциальной функции (33), выражаются через один и тот же параметр B. При не очень малых B^2 роль переходов из состояний, близких к сепаратрисе, и из устойчивых состояний сравнима. Условие

$$B^2 \ll 1 \tag{51}$$

позволяет оценить требования, которые следует предъявить к параметрам волноводной системы и амплитуде слабого сигнала для возможности осуществления фазового фильтра. Действительно, при выполнении условия (51) возможна реализация нелинейной волноводной системы конечной длины, в которой статистика выходной фазы определяется лишь краевыми условиями. Условие (51) становится особенно наглядным, если выразить его в форме

$$\frac{1}{2\pi B^2} = \frac{\overline{V_0^2}}{\overline{V_{\text{тепл}}^2}} \frac{\beta V_p}{\delta(0)} \gg 1, \tag{52}$$

где

$$\overline{V_{\text{тепл}}^2} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\overline{L}}{C}} kT\omega. \tag{53}$$

Как нетрудно показать, $V^2_{\text{тепл}}$ является средним квадратом амплитуды прямой волны в линейной линии, возбуждаемой ее собственными шумами, заключенными в полосе частот $\sim 2\omega$. Итак, если условие усиления $\beta V_p > \delta(0)$ выполнено с превышением в три-четыре раза, статистика краевых условий играет решающую роль уже при $\overline{V_0^2} \simeq \overline{V_{\text{тепл}}^2}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Полученные результаты показывают, что статистические характеристики амплитуды и фазы слабого сигнала в произвольном сечении нелинейной линии в общем случае определяются статистикой краевых условий и воздействием собственных шумов линии, накапливающимся с расстоянием. При выполнении условия (52) решающую роль играет статистика краевых условий; при этом относительные времена пребывания выходной фазы в двух возможных состояниях определяются видом функции распределения входной фазы. Поэтому устройство, содержащее нелинейную линию передачи и фазовый детектор, может непрерывно осуществлять статистические испытания над одномерной функцией распределения фазы входного сигнала.

Следует отметить, что при помощи уравнений (11) может быть рассмотрен и случай, когда точная кратность частот сигнала и накачки отсутствует. При этом если выполнено условие (51), выходная фаза и здесь определяется исключительно краевыми условиями и помимо случайных переходов из состояния I в II и обратно, связанных с флуктуациями входной фазы, содержит также периодическую составляющую с частотой Δ_1, равной расстройке средней частоты слабого сигнала относительно половины частоты накачки.

Авторы приносят искреннюю признательность С. М. Рытову за ценные советы, высказанные при обсуждении работы. Авторы благодарны также Р. Л. Стратоновичу за полезное обсуждение материала § 3.

ЛИТЕРАТУРА

1. P. K. Tien, J. Appl. Phys., 1958, **29**, 9, 1347.
2. А. В. Гапонов, Г. И. Фрейдман, Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1960, **3**, 1, 79.
3. Р. В. Хохлов, Радиотехника и электроника, 1961, **6**, 7, 1116.
4. С. М. Рытов, Теория электрических флуктуаций и теплового излучения, Изд. АН СССР, 1953, стр. 168.
5. С. М. Рытов, ЖЭТФ, 1955, **29**, 3, 304.
6. Р. Л. Стратонович, Радиотехника и электроника, 1958, **3**, 4, 497.
7. Р. В. Хохлов, Докл. АН СССР, 1954, **97**, 3, 411.
8. С. А. Ахманов, Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1960, **3**, 1, 110.
9. Б. Р. Левин, Теория случайных процессов и ее применения в радиотехнике, Изд. Советское радио, 1960.
10. С. Чандрасекар, Стохастические проблемы в физике и астрономии, ИЛ, 1947, стр. 117.
11. Р. Л. Стратонович, П. С. Ланда, Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1959, 2, 1, 37.

Физический факультет
Московского государственного
университета им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
31 III 1961

СИНТЕЗ НЕОДНОРОДНЫХ ЛИНИЙ ПО ВХОДНОМУ СОПРОТИВЛЕНИЮ, ЗАДАННОМУ В ВИДЕ ДРОБНО-РАЦИОНАЛЬНОЙ ФУНКЦИИ ЧАСТОТЫ

О. Н. Литвиненко

Изложен метод определения закона изменения волнового сопротивления неоднородной линии по заданному входному сопротивлению. Применение метода проиллюстрировано на примерах синтеза неоднородных линий-фильтров и формирующих линий.

ВВЕДЕНИЕ

Под синтезом неоднородной линии будем понимать определение закона изменения волнового сопротивления линии по заданному входному сопротивлению. В общем случае (при произвольном входном сопротивлении) эта задача является чрезвычайно сложной и до настоящего времени не решена. В данной статье рассмотрена задача синтеза неоднородных линий для входных сопротивлений, представимых в виде дробно-рациональной функции частоты. Такой выбор входных сопротивлений обусловлен, главным образом, двумя обстоятельствами: 1) возможностью аппроксимации в ограниченной полосе частот заданной функции дробно-рациональной функцией с любой степенью точности; 2) возможностью получения решения в конечном виде.

Следует также заметить, что в некоторых случаях желательно задавать входное сопротивление в виде рациональной дроби, например при синтезе неоднородных линий-фильтров.

Вопрос о синтезе неоднородных линий по входному сопротивлению рассматривался в интересной работе А. Л. Фельдштейна [1]. Результаты, полученные этим автором, справедливы для малых значений коэффициента отражения и, по существу, носят качественный характер. В данной статье изложен новый метод, применимый для технических расчетов.

1. МЕТОД СИНТЕЗА НЕОДНОРОДНЫХ ЛИНИЙ ПО ВХОДНОМУ СОПРОТИВЛЕНИЮ

Известно, что процессы в неоднородных линиях описываются системой уравнений

$$-\frac{dU}{dx} = pL(x)\,I, \qquad -\frac{dI}{dx} = pC(x)\,U.$$

Если перейти от переменной x к новой переменной τ по формуле

$$\tau = \int_0^x \sqrt{L(y)\,C(y)}\,dy$$

и обозначить волновое сопротивление линии в функции τ через $W(\tau)$, то получим

$$-U' = pWI, \qquad -I' = p\frac{U}{W}$$

(штрих означает дифференцирование по τ). Отсюда нетрудно найти дифференциальное уравнение для входного сопротивления линии $Z = U/I$:

$$Z' - p\frac{Z^2}{W} + pW = 0. \tag{1}$$

Если бы нам была известна зависимость входного сопротивления Z от τ, то определение волнового сопротивления из (1) не представляло никакого труда. Задача, однако, состоит в том, чтобы найти закон изменения волнового сопротивления $W(\tau)$ по заданному входному сопротивлению в одной точке, например в начале линии (при $\tau = 0$). Метод, которым мы пользуемся для решения этой задачи, состоит в следующем.

Обозначим через $Z_{k-1}(\tau)$ и $W_{k-1}(\tau)$ соответственно входное и волновое сопротивления некоторой исходной линии. Считаем, что нам известны Z_{k-1} и W_{k-1} для любой точки этой линии.

Произведя над Z_{k-1} дробно-линейное преобразование вида

$$Z_k(\tau) = \rho_k(\tau)\,\frac{\dfrac{Z_{k-1}(\tau)}{\rho_k(\tau)} + \dfrac{p}{a_k}}{1 + \dfrac{Z_{k-1}(\tau)}{\rho_k(\tau)}\,\dfrac{p}{a_k}}, \tag{2}$$

получим входное сопротивление новой линии. В этом выражении a_k — постоянная; ρ_k — функция τ; a_k и ρ_k не зависят от p.

Нетрудно видеть, что если Z_{k-1} представляет собой дробно-рациональную функцию p, то и Z_k является дробно-рациональной функцией p, причем степени полиномов числителя и знаменателя в этом случае будут на единицу больше.

Выражение (2) позволяет классифицировать неоднородные линии по степени полиномов, входящих в числитель и знаменатель выражения для входного сопротивления.

К нулевому классу отнесем бесконечно длинную однородную линию. Ради простоты будем считать ее волновое сопротивление $W_0 = 1$, тогда и входное сопротивление $Z_0 = 1$ (и не зависит от τ).

Полагая в (2) $k = 1$, получим входное сопротивление линии первого класса

$$Z_1 = \frac{1 + \dfrac{p}{a_1}\rho_1}{1 + \dfrac{p}{a_1}\dfrac{1}{\rho_1}}, \tag{3}$$

а при $k=2$

$$Z_2 = \frac{1 + p\left(\dfrac{\rho_1}{a_1} + \dfrac{\rho_2}{a_2}\right) + \dfrac{p^2}{a_1 a_2}\dfrac{\rho_2}{\rho_1}}{1 + p\left(\dfrac{1}{a_1\rho_1} + \dfrac{1}{a_2\rho_2}\right) + \dfrac{p^2}{a_1 a_2}\dfrac{\rho_1}{\rho_2}} \tag{4}$$

— входное сопротивление линии второго класса и т. д.

Так как при переходе от Z_{k-1} к Z_k происходит увеличение числа независимых параметров на два (ρ_k и a_k), то всегда можно так подобрать значения этих параметров при $\tau = 0$, чтобы получить требуемое входное сопротивление. Следовательно, a_k и $\rho_k(0)$ можно считать известными величинами.

Для нахождения волновых сопротивлений линий различных классов подставим (2) в (1) и приравняем нулю коэффициенты при одинаковых степенях p. В результате будем иметь

$$W_k = \frac{\rho_k^2}{W_{k-1}}, \tag{5}$$

$$\rho_k' + a_k\frac{\rho_k^2}{W_{k-1}} - a_k W_{k-1} = 0. \tag{6}$$

Отсюда вытекает, что волновое сопротивление линии n-го класса можно найти из решения системы $2n$ уравнений вида (5) и (6) при $k = 1, 2, \ldots, n$

Из (5) и (6) можно исключить $\rho_k(\tau)$ и получить одно уравнение, связывающее $W_k(\tau)$ с $W_{k-1}(\tau)$. В этом случае закон изменения волнового сопротивления определится из решения системы n уравнений первого порядка ($k = 1, 2, \ldots, n$).

Удобно рассматривать вместо $W_k(\tau)$ $A_k(\tau) = \sqrt{W_k(\tau)}$.

Для $A_k(\tau)$ имеем следующие уравнения:

$$A_k' A_{k-1} + A_k A_{k-1}' + a_k A_k^2 - a_k A_{k-1}^2 = 0,$$
$$A_k(0) = \frac{\rho_k(0)}{A_{k-1}(0)}, \quad k = 1, 2, \ldots, n; \quad A_0 = 1. \tag{7}$$

Эти уравнения и решают поставленную задачу.

Таким образом, для того чтобы найти волновое сопротивление линии n-го класса $W_n(\tau)$ по заданному входному сопротивлению в одной точке $Z_n(0)$, необходимо предварительно вычислить a_k и $\rho_k(0)$, а затем найти из (7) $A_n(\tau)$. Волновое сопротивление определится как

$$W_n(\tau) = A_n^2(\tau).$$

Числа a_k и $\rho_k(0)$ могут быть найдены путем сравнения коэффициентов при одинаковых степенях p в заданном входном сопротивлении и сопротивлении линии $Z_n(0)$, выраженном при помощи формулы (2) через a_k и $\rho_k(0)$. Мы, однако, рекомендуем пользоваться другим методом, более эффективным, особенно при больших n.

Не останавливаясь на промежуточных выкладках, приведем окончательные результаты.

Если рассматривать $Z_n(0)$ как функцию p, то оказывается, что a_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) равны тем значениям p, при которых четная часть $Z_n(0)$ обращается в нуль. Зная a_k, числа $\rho_k(0)$ находим из (2):

$$\rho_k(0) = Z_k(0)\big|_{p=a_k}. \tag{8}$$

Пример. Найти закон изменения волнового сопротивления неоднородной линии, входное сопротивление которой при $\tau = 0$

$$Z_2(p) = \frac{1 + 10p + 4p^2}{1 + 0{,}625\,p + 0{,}25\,p^2}.$$

1. Выделяем четную часть $Z_2(p)$ и приравниваем ее нулю:

$$\frac{1 - 2p^2 + p^4}{(1 + 0{,}25\,p^2)^2 - (0{,}625\,p)^2} = 0.$$

Отсюда находим $p_{1,2} = 1 = a_{1,2}$.

2. По формуле (8) определяем

$$\rho_2 = Z_2(a_2) = 8.$$

3. Из формулы (2) при $k = 2$ находим

$$Z_1 = \rho_2 \frac{\dfrac{Z_2}{\rho_2} - \dfrac{p}{a_2}}{1 - \dfrac{Z_2}{\rho_2}\dfrac{p}{a_2}}$$

или

$$Z_1 = 8\,\frac{1 + 2p - p^2 - 2p^3}{8 + 4p - 8p^2 - 4p^3} = 2\,\frac{1 + 2p}{2 + p}.$$

Отсюда $\rho_1 = Z_1(a_1) = 2$.

4. Из (7) находим

$$A_1(0) = 2, \qquad A_2(0) = 4.$$

5. Решаем систему уравнений

$$A_1' + A_1^2 - 1 = 0,$$
$$A_1' A_1 + A_2 A_1' + A_2^2 - A_1^2 = 0.$$

Интеграл первого из этих уравнений имеет вид

$$A_1(\tau) = \operatorname{cth}(\tau + C_1),$$

где C_1 — постоянная интегрирования, $C_1 = \operatorname{Ar\,cth} A_1(0) \simeq 0{,}55$.

Одним частным решением второго уравнения является $A_2 = -1$, поэтому общее решение ищем в виде

$$A_2(\tau) = -1 + \frac{1}{\psi(\tau)}.$$

Для $\psi(\tau)$ имеем линейное дифференциальное уравнение первого порядка, которое всегда интегрируется в конечном виде:

$$\psi' - \frac{2\operatorname{cth} 2(\tau + C_1)}{\operatorname{ch}(\tau + C_1)}\psi - \operatorname{th}(\tau + C_1) = 0,$$

$$\psi(\tau) = \frac{\operatorname{sh} 2(\tau + C_1) - 2(\tau + C_2)}{2\operatorname{sh} 2(\tau + C_1)},$$

где C_2 — постоянная интегрирования.

Так как $A_2(0) = 4$, то $\psi(0) = 0{,}2$. С другой стороны,

$$\psi(0) = \frac{\operatorname{sh} 2C_1 - 2C_2}{2\operatorname{sh} 2C_1}.$$

Отсюда $C_2 = 0{,}4$.

Подставляя $\psi(\tau)$ в выражение для $A_2(\tau)$ и учитывая, что $W_2(\tau) = A_2^2(\tau)$, окончательно получим

$$W_2(\tau) = \left[\frac{\operatorname{sh} 2(\tau + 0{,}55) + 2(\tau + 0{,}4)}{\operatorname{sh} 2(\tau + 0{,}55) - 2(\tau + 0{,}4)}\right]^2.$$

Нелишне заметить, что при $\tau \to \infty$ $W_2(\tau)$ монотонно стремится к единице. Поэтому всегда можно подобрать такое $\tau = \tau_1$, при котором $W_2(\tau_1)$ будет отличаться от единицы на некоторую заданную величину. Если в точке $\tau = \tau_1$ оборвать линию и включить сопротивление нагрузки, равное единице, то требуемое входное сопротивление $Z_2(p)$ обеспечит с наперед заданной точностью линия конечной длины, нагруженная на чисто активное сопротивление.

2. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ СХЕМЫ НЕОДНОРОДНЫХ ЛИНИЙ

Предположим, что нам известно сопротивление некоторой цепи; обозначим его через Z_{k-1}. Подключим эту цепь к выходу симметричного четырехполюсника с характеристическим сопротивлением ρ_k и постоянной передачи $g_k = \operatorname{Ar\,th}\frac{p}{a_k}$. Тогда входное сопротивление четырехполюсника Z_k, нагруженного сопротивлением Z_{k-1}, будет равно [2]

$$Z_k = \rho_k \frac{\dfrac{Z_{k-1}}{\rho_k} + \dfrac{p}{a_k}}{1 + \dfrac{Z_{k-1}}{\rho_k}\dfrac{p}{a_k}}.$$

Так как последнее выражение ничем не отличается от выражения (2), то отсюда вытекает, что входное сопротивление линии k-го класса есть результат трансформации входного сопротивления линии $(k-1)$-го класса четырехполюсником с характеристическим сопротивлением ρ_k,

не зависящим от частоты, и постоянной передачи $g_k = \mathrm{Ar\,th}\,\frac{p}{a_k}$, не зависящей от координаты τ.

Поскольку в качестве линии нулевого класса взята бесконечно длинная однородная линия, то входное сопротивление бесконечно длинной линии n-го класса можно найти из схемы, представленной на рис. 1.

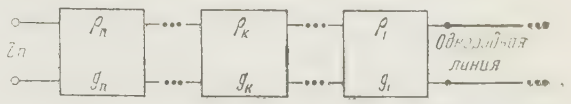


Рис. 1. Схема для определения входного сопротивления бесконечно длинной линии n-го класса

Построим теперь эквивалентную схему неоднородной линии n-го класса, нагруженной сопротивлением $Z_н$. Пусть время задержки линии равно $t_з$. При $\tau = 0$, пользуясь формулой (2), можно выделить n четырехполюсников, подобно тому как это было сделано для бесконечно длинных линий.

При $\tau = t_з$ $Z_n(t_з) = Z_н$. Вместе с тем из (2) ($k = n$)

$$Z_{n-1}(t_з) = \rho_n(t_з)\,\frac{\dfrac{Z_н}{\rho_n(t_з)} - \dfrac{p}{a_n}}{1 - \dfrac{Z_н}{\rho_n(t_з)}\,\dfrac{p}{a_n}}.$$

Здесь $Z_{n-1}(t_з)$ — сопротивление нагрузки линии $(n-1)$-го класса.

Нетрудно видеть, что $Z_{n-1}(t_з)$ есть результат трансформации сопротивления $Z_н$ симметричным четырехполюсником с характеристическим сопротивлением $\rho_n(t_з)$ и постоянной передачи, равной $-g_n$.

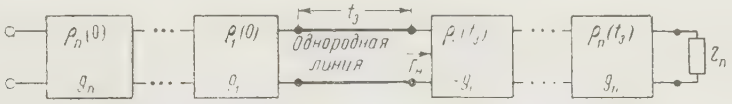
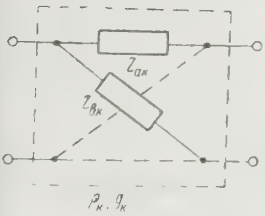


Рис. 2. Эквивалентная схема нагруженной на сопротивление $Z_н$ неоднородной линии n-го класса

Продолжая процесс выделения четырехполюсников и дальше, мы в конце концов придем к эквивалентной схеме, показанной на рис. 2.

Каждый из четырехполюсников, входящих в схему рис. 2, может быть заменен скрещенной, T- или $П$-образной схемой. В частности, для скрещенной схемы (рис. 3) имеем



$$Z_{ak} = \frac{\rho_k}{p}\left(a_k + \sqrt{a_k^2 - p^2}\right), \quad Z_{bk} = \frac{\rho_k p}{a_k + \sqrt{a_k^2 - p^2}}.$$

Рис. 3. К замене четырехполюсника с параметрами ρ_k и g_k скрещенной схемой

Полученная эквивалентная схема неоднородной линии позволяет учесть влияние сопротивления нагрузки $Z_н$ на частотные характеристики цепи.

Так, при синтезе неоднородных линий-фильтров обычно задаются зависимостью модуля коэффициента отражения от частоты $\Gamma(\omega)$. Можно

показать [3], что

$$\left|\frac{\Gamma_б - \Gamma_н}{1 - \Gamma_б\Gamma_н}\right| \leqslant \Gamma \leqslant \frac{\Gamma_б + \Gamma_н}{1 + \Gamma_б\Gamma_н}, \qquad (9)$$

где $\Gamma_б$ — модуль коэффициента отражения на входе бесконечно длинной линии, а $\Gamma_н$ — модуль коэффициента отражения в конце однородной линии (рис. 2).

Если $Z_н = W_n(t_з)$ и $t_з$ достаточно велико, то $\Gamma_н \simeq 0$. Тогда $\Gamma \simeq \Gamma_б$; формула (9) позволяет оценить получающуюся при этом погрешность.

3. ПРИМЕРЫ

Предложенный метод, по мнению автора, явится важным средством синтеза цепей с распределенными параметрами. Уже сейчас можно указать некоторые области, где применение данного метода позволит получить существенные результаты: 1) синтез формирующих линий; 2) синтез линий-фильтров с заданными характеристиками рабочего затухания; 3) синтез колебательных систем на СВЧ; 4) синтез согласующих переходов; 5) синтез трансформирующих линий.

Поскольку в настоящей статье, естественно, нет возможности остановиться на этом подробно, мы рассмотрим лишь два простейших примера.

Пример 1. Определить закон изменения волнового сопротивления неоднородной линии, формирующей на сопротивлении нагрузки $R_н$, зашунтированной емкостью $C_н$, импульс со следующими параметрами: длительность импульса $t_и = 0{,}1$ *мксек*, длительность фронта $t_ф = 0{,}02$ *мксек*. Данные нагрузки: $R_н = 500$ *ом*, $C_н = 200$ *пф*.

Отношение напряжения на $Z_н$ к величине зарядного напряжения для промежутка времени $0 - t_и$ определяется выражением

$$\frac{\bar{u}}{E} = \frac{Z_н}{Z_н + Z_1},$$

где

$$Z_н = \frac{R_н}{1 + pR_нC_н}; \qquad Z_1 = \rho_1(0)\,\frac{\frac{W_0}{\rho_1(0)} + \frac{p}{a_1}}{1 + \frac{W_0}{\rho_1(0)}\,\frac{p}{a_1}}.$$

Для того чтобы $u(t)$ изменялось по экспоненциальному закону (как и при использовании однородной линии) и амплитуда импульса равнялась $0{,}5E$, положим $W_0 = R_н$, $a_1 = 1/\rho_1(0)\,C_н$. Тогда

$$\frac{\bar{u}}{E} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{p}{p + \frac{2R_н}{\rho_1^2(0)\,C_н}}\right).$$

Отсюда

$$t_ф = 0{,}5\,\frac{\rho_1^2(0)\,C_н}{R_н}.$$

Последнее равенство позволяет определить

$$\rho_1(0) = \sqrt{2t_ф\,\frac{R_н}{C_н}} = 316\ ом.$$

Закон изменения волнового сопротивления может быть найден из (7) или из (5) и (6). Поскольку при выводе выражения (7) мы считали $W_0 = 1$, то лучше воспользоваться равенствами (5) и (6).

Из (6) находим

$$\rho_1(\tau) = W_0 \operatorname{th} a_1 (C_1 + \tau).$$

Постоянная интегрирования

$$C_1 = \frac{1}{a_1} \operatorname{Ar\,th} \frac{\rho_1(0)}{W_0} = \rho_1(0)\, C_{\text{п}} \operatorname{Ar\,th} \frac{\rho_1(0)}{R_{\text{н}}} = 471 \cdot 10^{-10}.$$

Вычислив a_1 и подставив все найденные значения в (5), получим

$$W_1(\tau) = 500 \operatorname{th}^2 (0{,}745 + 15{,}8 \cdot 10^6\, \tau); \quad 0 \leqslant \tau \leqslant 0{,}05 \cdot 10^{-6}.$$

Пример 2. Выше, в § 1, мы рассмотрели пример синтеза неоднородной линии по заданному входному сопротивлению. Нетрудно проверить, что рассмотренное там сопротивление $Z_2(p)$ соответствует входному сопротивлению фильтра верхних частот с максимально гладкой характеристикой рабочего затухания. Действительно, если положить внутреннее сопротивление источника $R_i = 16$, то коэффициент отражения

$$\gamma = \frac{Z_2 - R_i}{Z_2 + R_i} = \frac{17 + 30p + 8p^2}{17 + 30p + 8p^2} = \frac{-15}{17 + 30p + 8p^2},$$

а квадрат модуля коэффициента отражения

$$|\gamma|^2 = \Gamma^2 = \frac{1}{1 + \frac{64}{225}(\omega^2 + 1)^2}.$$

Следовательно, коэффициент вносимых потерь

$$L = \frac{1}{1 - \Gamma^2} = 1 + \frac{225}{64(\omega^2 + 1)^2},$$

что подтверждает сказанное.

При помощи линий второго класса можно получить простейшие полосовые фильтры с максимально гладкой характеристикой. Полагая в (4) $a_1 = a_2 = 1$, $\rho_1 = \rho_2 = \rho$, будем иметь

$$Z_2 = \frac{j\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right) + 2\rho}{j\left(\omega - \frac{1}{\omega}\right) + \frac{2}{\rho}}.$$

Если взять $R_i = \rho^2$, то

$$L = 1 + 0{,}25\left(\rho - \frac{1}{\rho}\right)^2 \left(\frac{\omega^2 - 1}{\omega^2 + 1}\right)^2.$$

Величина ρ определяет максимальное затухание в полосе заграждения фильтра.

Волновое сопротивление линии находится изложенным выше методом.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанная методика позволяет производить синтез неоднородных линий по входному сопротивлению, заданному в виде дробно рациональной функции частоты. Метод может быть применен для синтеза цепей СВЧ (фильтры, согласующие устройства, колебательные системы) и для синтеза формирующих и трансформирующих линий.

Автор приносит глубокую благодарность Я. С. Идхоки за ряд ценных советов, высказанных им при обсуждении данного метода.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. Л. Фельдштейн, Некоторые задачи синтеза неоднородных линий, Радиотехника, 1958, **13**, 8, 13.
2. Г. И. Атабеков, Теория линейных электрических цепей, Изд. Советское радио, 1960.
3. Линии передачи сантиметровых волн, перев. с англ., 2, Изд. Советское радио, 1951.

Поступила в редакцию
1 III 1961

БИГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В АВТОГЕНЕРАТОРЕ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПРИ АСИНХРОННОМ СООТНОШЕНИИ ЧАСТОТ

П. А. Перепелятник

Показано, что при некотором запаздывании в автогенераторе с кубической аппроксимацией нелинейности возможна одновременная генерация двух частот, тогда как при других значениях запаздывания в системе невозможен ни один из стационарных режимов; возникшее асинхронное колебание растет беспредельно, а основное колебание гасится.

1. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В работе [1] показано *, что автоколебательную систему при аппроксимации нелинейности неполным кубическим полиномом вида $i_a = S_1 U_g - S_3 U_g^3$ можно описать уравнением

$$\ddot{U} + 2\delta\dot{U} + \omega_0^2 U + 2\delta(\mu_1 - 3\mu_3 U_\tau^2) U_\tau = 0, \tag{1}$$

где $\mu_1 = S_1 R$; $\mu_3 = S_3 R$.

При $\tau < \tau_{крз}$ решение уравнения (1) в виде $U = X\cos\psi$ также не является единственным. Более общее решение уравнения (1) следует искать в виде

$$U = \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} X_i \cos\psi_i. \tag{2}$$

Мы ограничим наше рассмотрение случаем $n = 2$. Тогда

$$U = x_1 + x_2 = X_1 \cos\psi_1 + X_2 \cos\psi_2. \tag{3}$$

Для определения границ устойчивости одночастотного решения вначале положим $X_2 \ll X_1$. Тогда, подставляя (3) в (1) после гармонической линеаризации, отбросив члены высшего порядка малости и комбинационные частоты, получим два уравнения

$$\ddot{x}_1 + 2\delta\dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 = 2\delta K_1(X_1)\dot{x}_{1\tau}, \tag{4а}$$

$$\ddot{x}_2 + 2\delta\dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 = 2\delta K_2(x_{1\tau})\dot{x}_{2\tau}, \tag{4б}$$

где

$$K_1 = \mu_1 - \frac{3}{4}\mu_3 X_1^2;$$

$$K_2 = \mu_1 - 3\mu_3 X_1^2 \cos^2\psi_{1\tau}.$$

Уравнение (4а) уже исследовано [1]. Займемся анализом уравнения (4б). Оно представляет собой линейное дифференциальное уравнение с переменным коэффициентом и запаздывающим аргументом. Решение этого уравнения облегчается тем обстоятельством, что мы ищем условия для возникновения асинхронного колебания. В этом случае можно разложить переменный коэффициент в ряд Фурье и взять от него только постоянную составляющую. Получим

$$K_2(X_1, 0) = \mu_1 - \frac{3}{2}\mu_3 X_1^2.$$

* Настоящая статья является продолжением работы [1].

Уравнение (4б) теперь имеет вид

$$\ddot{x}_2 + 2\delta \dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + 2\delta K_2 (X_1, 0)\, \dot{x}_{2\tau} = 0. \tag{5}$$

Физический смысл этой операции таков. При наличии колебания x_1 рабочая точка передвигается по нелинейной характеристике с частотой ω_1 и мгновенное значение крутизны при этом меняется по закону $S(t) = S_1 - 3S_3X_1^2 \cos^2 \psi$. Так как наша система обладает конечной полосой пропускания, то она будет реагировать только на изменение постоянной составляющей крутизны $S_0(X_1) = S_1 - \frac{3}{2} S_3 X_1^2$. Постоянная составляющая, т. е. среднее во времени значение крутизны, зависит от амплитуды колебаний основной частоты. С увеличением этой амплитуды среднее значение крутизны вначале уменьшается, потом, переходя через нуль, становится отрицательным и далее начинает расти по абсолютному значению.

Подобный эффект достаточно хорошо известен для случая, когда подача на недовозбужденный генератор внешнего переменного напряжения вызывает возбуждение колебаний собственной частоты, асинхронной по отношению к частоте внешнего генератора. В нашем случае роль внешнего источника переменного напряжения играет сам же генератор.

Применяя к (5) преобразование Лапласа, получим, полагая начальные условия нулевыми,

$$p^2 + 2\delta p\, [1 + K_2 (X_1, 0)\, e^{-p\tau}] + \omega_0^2 = 0. \tag{6}$$

Отсюда видно, что если $|K_2| > 1$, то в системе может при некоторых значениях τ возбудиться второе колебание, асинхронное по отношению к основному.

В общем случае, когда x_2 не мало, вместо (4) будем иметь

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 + 2\delta \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1 + 2\delta K_1 (X_{1\tau}, X_{2\tau})\, \dot{x}_{1\tau} = 0, \\ \ddot{x}_2 + 2\delta \dot{x}_2 + \omega_0^2 x_2 + 2\delta K_2 (X_{1\tau}, X_{2\tau})\, \dot{x}_{2\tau} = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Здесь

$$K_1 = \mu_1 - \frac{3}{4} \mu_3 (X_{1\tau}^2 + 2X_{2\tau}^2);$$

$$K_2 = \mu_1 - \frac{3}{4} \mu_3 (2X_{1\tau}^2 + X_{2\tau}^2);$$

$X_{i\tau} = X$ в случае стационарных колебаний.

Применяя к (7) преобразование Лапласа при нулевых начальных условиях, будем иметь

$$p^2 + 2\delta p\, (1 + K_1 e^{-p\tau}) + \omega_0^2 = 0, \tag{8а}$$

$$p^2 + 2\delta p\, (1 + K_2 e^{-p\tau}) + \omega_0^2 = 0. \tag{8б}$$

Подставляя в (8а) $p = j\omega_1$, а в (8б) $p = j\omega_2$ и приравнивая действительные и мнимые части полученных выражений нулю, получим

$$\begin{aligned} 1 + K_i \cos \omega_i \tau = 0, \\ \omega_0^2 - \omega_i^2 + 2\delta K_i \omega_i \sin \omega_i \tau = 0. \end{aligned} \qquad i = 1, 2 \tag{9}$$

Выражения (9) можно записать в иной форме:

$$\frac{\omega_0}{\omega_i}\cdot\frac{\omega_i}{\omega_0}=\frac{1}{Q}\sqrt{K_i^2-1},$$

$$\operatorname{tg}\omega_i\tau=Q\left(\frac{\omega_0}{\omega_i}-\frac{\omega_i}{\omega_0}\right), \tag{10}$$

где $Q=R\omega_0 C$.

После соответствующих преобразований уравнения (10) можно представить в виде

$$W_1=\frac{K_1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega_0}{\omega_1}-\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)^2}}=1, \tag{11а}$$

$$\tau=\frac{1}{\omega_1}\left[\operatorname{arc\,tg}Q\left(\frac{\omega_0}{\omega_1}-\frac{\omega_1}{\omega_0}\right)+(2n+1)\pi\right];\quad n=0,1,2,\ldots, \tag{11б}$$

$$W_2=\frac{|K_2|}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega_0}{\omega_2}-\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)^2}}=1, \tag{12а}$$

$$\tau=\frac{1}{\omega_2}\left[\operatorname{arc\,tg}Q\left(\frac{\omega_0}{\omega_2}-\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)+(2m+1)\pi\right];\quad m=0,1,2,\ldots \text{ для } K_2\geqslant 1 \tag{12б}$$

$$\tau=\frac{1}{\omega_2}\left[\operatorname{arc\,tg}\,Q\left(\frac{\omega_0}{\omega_2}-\frac{\omega_2}{\omega_0}\right)+2m\pi\right];\quad m=0,1,2,\ldots \text{ для } K_2\leqslant -1. \tag{12в}$$

В (11) полагаем, что K_1 всегда положительно. В (12в) при $m=0$ бе
рутся только такие значения частот, при которых τ получается положи
тельным.

Как уже указывалось выше, при $|K_2|<1$ возникновение асинхронного
колебания невозможно. Мы поэтому будем интересоваться только той об
ластью колебаний основной частоты ω_1, в которой $|K_2|\geqslant 1$.

В случае если для некоторого значения времени задержки выполняют
ся одновременно уравнения (11) и (12), то в системе возможно существо
вание асинхронных колебаний.

Назовем то минимальное значение времени запаздывания, при кото
ром возможно существование двух асинхронных колебаний, четвертым
критическим временем запаздывания ($\tau_{кр\,4}$).

Пользуясь (11) и (12), можно найти, что в случае $K_2<-1$

$$\tau_{кр\,4}=\frac{\pi-(|\varphi_1|+|\varphi_2|)}{|\omega_2-\omega_1|}, \tag{13}$$

где $\varphi_i=\operatorname{arc\,tg}\,Q\left(\frac{\omega_0}{\omega_i}-\frac{\omega_i}{\omega_0}\right);\quad i=1,2$. В случае $K_2>1$ $\tau_{кр\,4}=\tau_{кр}$

Для определения устойчивости найденных асинхронных колебаний
необходимо провести специальное исследование.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ АСИНХРОННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Положим

$$x_i=(X_{i0}+\xi_i)\cos(\psi_{i0}+\theta_i);\quad i=1,2, \tag{14}$$

где ξ_i и θ_i — малые медленно меняющиеся функции времени.

Разлагая (14) в ряд Тейлора в окрестности X_{i0}, ψ_{i0}, для главной части
приращения получим

$$dx_i=\cos\psi_{i0}\,\xi_i-X_i\sin\psi_{i0}\theta_i;\quad i=1,2. \tag{15}$$

Используя (15) и (7), находим

$$d\ddot{x}_i + 2\delta d\dot{x}_i + \omega_0^2 dx_i + 2\delta d\,(K_{i\tau}\dot{x}_{i\tau}) = 0; \quad i = 1, 2. \tag{16}$$

Отбросив члены высшего порядка малости, после соответствующих преобразований из (16) получим

$$\begin{aligned}
-\dot{\xi}_1 T_k &= \xi_1 + K_{\xi 1}\cos\omega_1\tau\xi_{1\tau} - K_{21\xi}\cos\omega_1\tau\xi_{2\tau} - K_1\sin\omega_1\tau X_{10}\,(\theta_1 - \theta_{1\tau}),\\
-\dot{\xi}_2 T_k &= \xi_2 + K_{\xi 2}\cos\omega_2\tau\xi_{2\tau} - K_{21\xi}\cos\omega_2\tau\xi_{1\tau} - K_2\sin\omega_2\tau X_{20}\,(\theta_2 - \theta_{2\tau}),
\end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned}
-\dot{\theta}_1 T_k &= \frac{1}{X_{10}}\sin\omega_1\tau\xi_1 - \frac{1}{X_{10}}\sin\omega_1\tau K_{\xi 1}\xi_{1\tau} +\\
&+ \frac{1}{X_{10}}\sin\omega_1\tau K_{21\xi}\xi_{2\tau} + \theta_1 + \cos\omega_1\tau K_1\theta_{1\tau},\\
-\dot{\theta}_2 T_k &= \frac{1}{X_{20}}\sin\omega_2\tau\xi_2 - \frac{1}{X_{20}}\sin\omega_2\tau K_{\xi 2}\xi_{2\tau} +\\
&+ \frac{1}{X_{20}}\sin\omega_2\tau K_{21\xi}\xi_{1\tau} + \theta_2 + \cos\omega_2\tau K_2\theta_{2\tau}.
\end{aligned}$$

Здесь приняты обозначения:

$$\begin{aligned}
K_{\xi 1} &= \mu_1 - \frac{9}{4}\mu_3\left(X_{10}^2 + \frac{2}{3}X_{20}^2\right);\\
K_{\xi 2} &= \mu_1 - \frac{9}{4}\mu_3\left(X_{20}^2 + \frac{2}{3}X_{10}^2\right);\\
K_{21\xi} &= 3\mu_3 X_{10}X_{20}.
\end{aligned}$$

Переходя к преобразованию Лапласа и интересуясь только вопросом устойчивости, из (17) можно получить характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix}
a_{11}+\lambda & a_{12} & a_{13} & 0\\
b_{21} & b_{22}+\lambda & 0 & b_{21}\\
c_{31} & c_{32} & c_{33}+\lambda & 0\\
d_{11} & d_{42} & 0 & d_{44}+\lambda
\end{vmatrix} = 0. \tag{18}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
a_{11} &= 1 - \frac{K_{\xi 1}}{K_1}e^{-p\tau}; \quad a_{12} = \frac{K_{21\xi}}{K_1}e^{-p\tau};\\
a_{13} &= -K_1\sin\omega_1\tau X_{10}\,(1 - e^{-p\tau}); \quad b_{21} = \frac{K_{21\xi}}{K_2}e^{-p\tau},\\
b_{22} &= 1 - \frac{K_{\xi 2}}{K_2}e^{-p\tau}; \quad b_{24} = -K_2\sin\omega_2\tau X_{20}\,(1 - e^{-p\tau});\\
c_{31} &= \frac{1}{X_{10}}\sin\omega_1\tau\,(1 - K_{\xi 1}e^{-p\tau}); \quad c_{32} = \frac{1}{X_{10}}\sin\omega_1\tau K_{21\xi}e^{-p\tau};\\
c_{33} &= 1 - e^{-p\tau}; \quad d_{41} = \frac{1}{X_{20}}\sin\omega_2\tau K_{21\xi}e^{-p\tau};\\
d_{42} &= \frac{1}{X_{20}}\sin\omega_2\tau\,(1 - K_{\xi 2}e^{-p\tau});\\
d_{44} &= c_{33}; \qquad \lambda = pT_k.
\end{aligned}$$

В работе [1] показано, что при $\tau > T_{кр3}$ одночастотные автоколебания неустойчивы, так как возникает самомодуляция, причем возникновение может быть жестким, когда требуются достаточно большие возмущения, или же мягким. В этом случае самомодуляция возникает самопроизвольно.

Из физических соображений совершенно очевидно, что и в случае двух частотных колебаний при больших запаздываниях колебания также будут неустойчивыми. Поэтому нет надобности исследовать характеристическое уравнение (18) в общем случае. Мы рассмотрим возможность одновременной генерации при $p\tau \simeq 0$, когда можно положить $|e^{-p\tau}| \simeq 1$. В этом случае характеристическое уравнение (18) упростится и примет вид

$$\lambda^2 + \lambda (a_{11} + b_{22}) + a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21} = 0. \tag{19}$$

Асинхронные колебания будут устойчивыми, если одновременно выполняются неравенства

$$a_{11}b_{22} - a_{12}b_{21} > 0, \tag{20}$$

$$a_{11} + b_{22} > 0. \tag{21}$$

Если $K_1 > 1$ и $K_2 > 1$, условие (20) не выполняется, что совпадает с результатами, полученными в [2] и [3]. Физически это означает, что основное колебание, вызвав асинхронное колебание, будет им же в дальнейшем подавлено и система перейдет на генерацию только одной новой частоты.

Если же $K_1 \geqslant 1$, а $K_2 \leqslant -1$, то неравенство (20) выполняется. В этом случае для устойчивости асинхронных колебаний необходимо выполнение дополнительного условия (21), которое можно преобразовать к виду

$$\frac{X_{10}^2}{K_1} - \frac{X_{20}^2}{|K_2|} > 0. \tag{22}$$

Анализ устойчивости бигармонических колебаний на этом еще нельзя считать оконченным. Необходимо дополнительное исследование возможности возникновения третьего колебания. Положим

$$U = x_1 + x_2 + x_3 = X_1 \cos \psi_1 + X_2 \cos \psi_2 + X_3 \cos \psi_3, \tag{23}$$

причем $X_3 \ll X_1$ и X_2. Подставляя (23) в основное уравнение (1), после соответствующих преобразований получим уравнения (7), которые уже нами исследовались, а для колебания x_3 уравнение

$$\ddot{x}_3 + 2\delta \dot{x}_3 + \omega_0^2 x_3 + 2\delta [\mu_1 - 3\mu_3 (x_{1\tau}^2 + x_{2\tau}^2)] \dot{x}_{3\tau} = 0. \tag{24}$$

Уравнение (24) также представляет собой линейное дифференциальное уравнение с переменным коэффициентом и запаздывающим аргументом. Так как мы интересуемся асинхронными колебаниями, то, разложив переменный коэффициент в двойной ряд Фурье, возьмем от него только постоянный коэффициент и получим

$$\ddot{x}_3 + 2\delta \dot{x}_3 + \omega_0^2 x_3 + 2\delta K_3 (X_1, X_2, 0) \dot{x}_{3\tau} = 0, \tag{25}$$

где

$$K_3 = \mu_1 - \frac{3}{2} \mu_3 (X_1^2 + X_2^2).$$

Применяя к (25) преобразование Лапласа и полагая начальные условия нулевыми, получим

$$p^2 + 2\delta p (1 + K_3 e^{-p\tau}) + \omega_0^2 = 0. \tag{26}$$

Если $|K_3| > 1$, то при некотором значении τ возможно возникновение колебаний третьей частоты. Иначе говоря, если при данном запаздывании найдется такая частота ω_3, лежащая в интервале, включающем ω_1 и ω_2

ри которой будут выполнены условия

$$\tau = \frac{1}{\omega_3}\left[\operatorname{arc\,tg}\, Q\left(\frac{\omega_0}{\omega_3}-\frac{\omega_3}{\omega_0}\right)+2m\pi\right];\quad m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\quad K_3<-1, \tag{27}$$

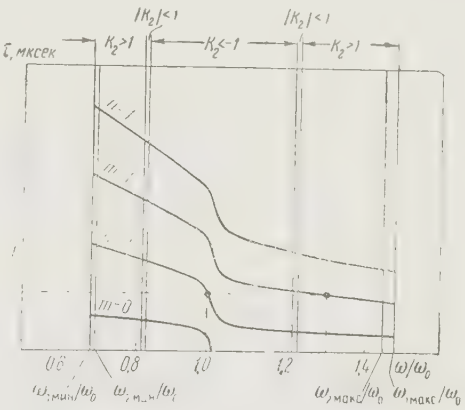
$$W_3(X_1,\ X_2,\ 0)=\frac{|K_3(X_1,\ X_2,\ 0)|}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega_0}{\omega_3}-\frac{\omega_3}{\omega_0}\right)^2}}>1, \tag{28}$$

амплитуда колебаний частоты ω_3 начнет нарастать. В этом случае рас-атриваемый бигармонический режим с частотами ω_1 и ω_2 будет неустой-ивым.

В уравнении (28) W_3 представляет собой коэффициент передачи для олебаний частоты ω_3 по замкнутой петле в присутствии двух исследуемых инхронных колебаний.

Для ответа на вопрос о том, как будет вести себя система в этом слу-ае, необходимо рассмотреть возможность одновременной генерации трех астот.

Если одно из условий (27) или (28) не выполняется, а условие (22) вы-олнено, то только в этом случае рассматриваемый бигармонический ре-им будет устойчивым. Если же словие (22) не выполняется, то и данном значении запаздыва-я в системе не могут существо-ать устойчивые колебания. В этом учае возникшее колебание с астотой ω_2 подавляет основное олебание с частотой ω_1 и далее астет беспредельно. Рассматри-аемая система при таком значе-и запаздывания не будет иметь одного устойчивого решения. одобный случай возможен толь-тогда, когда значение асин-онной частоты ω_2 окажется до-аточно близким к резонансной астоте контура ω_0.



В физической системе колебания нарастать до бесконечности не могут, к как всегда будет иметь место явление насыщения. Действительно, ведь бая физическая система имеет конечную мощность, больше которой а в нагрузку отдать не может. Мы получили результат, противореча-й этому заключению лишь потому, что допустили математическую идеа-зацию нелинейности, не соответствующую физической системе.

Кроме рассмотренного асинхронного режима в системе возможны и ихронные режимы, когда генерируемые частоты связаны соотношением да $n\omega_1 = m\omega_2$, где n и m — целые числа. Вообще говоря, если $n + m \gg 1$, то колебания можно считать асинхронными; если же n и m — ые небольшие числа, то колебания будут синхронными и окажутся вза-освязанными не только амплитудными, но и фазовыми соотношениями. Исследование синхронных колебаний представляет большие трудности, настоящей работе они не рассматриваются.

Для иллюстрации применения полученных уравнений рассмотрим имер.

Пусть $S = 10^{-3} - 10^{-5}\,X^2$, $Q = 50$, $R = 40$ *ком*, $\omega_0 = 2\pi \cdot 10^6$ *1/сек*. рисунке изображена зависимость времени запаздывания от частоты, да удовлетворяются уравнения (11б) и (12в); $\omega_{1мин}$ и $\omega_{1макс}$ указывают ницу полосы прозрачности системы в случае генерации только одной тоты; $\omega_{2мин}$ и $\omega_{2макс}$ указывают полосу прозрачности для асинхронной тоты, если частота основного колебания совпадает с резонансной часто-контура. Если же основная частота не совпадает с резонансной ча-

стотой контура, то полоса прозрачности для асинхронного колебания будет меньше. На рисунке указаны области, где коэффициент передачи первой гармоники асинхронного колебания имеет различные значения. Случай, когда $\omega_1 = \omega_0$, наиболее благоприятен для возникновения асинхронного колебания.

В случае $\tau = 0{,}6$ *мксек* возможны два устойчивых асинхронных колебания с частотами $\omega_1 = 0{,}99\ \omega_0$; $\omega_2 = 1{,}3\ \omega_0$ и амплитудами соответственно $X_1 = 10{,}3$ *в* и $X_2 = 3{,}5$ *в*.

Если же $\tau = 0{,}8$ *мксек*, то в данной системе не может существовать ни одного устойчивого колебания.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Показано, что в автогенераторе с запаздыванием и нелинейностью в виде неполного кубического полинома при некоторых значениях запаздывания, бо́льших или равных четвертому критическому ($\tau_{кр\,4}$), возможно существование устойчивого бигармонического режима. Найдено выражение для четвертого критического значения запаздывания. Показано, что существуют такие значения запаздывания ($\tau \geqslant \tau_{кр\,4}$), при которых в системе нет ни одного устойчивого колебания.

ЛИТЕРАТУРА

1. П. А. Перепелятник, Автоколебания в генераторе с запаздыванием, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 10, 1601.
2. В. С. Панкратов, Стационарные режимы автогенератора с запаздывающей обратной связью, Изв. вузов МВО СССР (Радиотехника), 1958, 1, 6, 705.
3. V. Met, On multimode oscillators with constant time delay, Proc. I. R. E., 1957, 45, 8, 1119.

Поступила в редакцию
19 XI 1960

О ЦЕПОЧЕЧНОМ СИНТЕЗЕ РЕАКТИВНОГО МНОГОПОЛЮСНИКА

А. Г. Руткас

На основе некоторых новых математических исследований предложен метод представления *LC*-многополюсников в виде эквивалентной цепочки простейших схем. Рассмотренный метод проиллюстрирован численным примером.

ВВЕДЕНИЕ

В теории волноводов важным приемом является построение электрической схемы, эквивалентной неоднородному участку волновода. Для изучения характера распространения волн через неоднородность интересно построить такую схему в виде линии передачи с сосредоточенными или распределенными параметрами L и C, не зависящими от частоты. Решение этого вопроса может быть использовано для синтеза волновода по частотным характеристикам.

В связи со сказанным возникает задача о замене многополюсника эквивалентной ему цепочкой простейших схем.

Ниже рассмотрены пассивные реактивные $4m$-полюсники с сосредоточенными параметрами L и C, работающие в установившемся режиме и включенные во внешнюю электрическую систему так, что обеспечивается равенство входных и выходных токов в каждой паре зажимов [5,9]. Оказывается, что передаточная матрица $A(\omega)$ такого $4m$-полюсника (аналог матрицы общенных параметров четырехполюсника) обладает свойством не растягивать некоторую индефинитную метрику J в соответствующем линейном пространстве для всякой частоты ω, $\operatorname{Im}\omega \geqslant 0$. В последние годы разработаны общие математические методы разложения аналитических матриц такого типа в произведение простейших матричных множителей [2,3].

Здесь предлагается использовать указанные методы для реализации матрицы $A(\omega)$ в виде цепочки простейших $4m$-полюсников. Отметим, что при таком соединении их передаточные матрицы перемножаются в обратном порядке. Применительно к четырехполюсникам эта идея была предложена и реализована в [4] *.

Рассматриваемый общий метод факторизации аналитических матриц-функций может быть также положен в основу синтеза многопроводной линии передачи с распределенными параметрами L и C.

1. МАТРИЦА $A(\omega)$

Оставляя в стороне случай вырождения, принимаем, что токи и напряжения на входе $4m$-полюсника линейно независимы (имеются в виду комплексные амплитудные значения токов и напряжений).

В n-мерном линейном пространстве H ($n = 2m$) назовем передаточной матрицей $A(\omega)$ матрицу-функцию от частоты ω, выражающую вектор

* Рассматриваемая задача для случая реактивного четырехполюсника решена также в [8] иным методом.

состояния на выходе $\vec{X}'$ через вектор состояния на входе $\vec{X}$:

$$\vec{X}' = A(\omega)\,\vec{X};\quad \vec{X}' = \begin{pmatrix} U_1' \\ \vdots \\ U_m' \\ I_m' \\ \vdots \\ I_1' \end{pmatrix};\qquad \vec{X} = \begin{pmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_m \\ I_m \\ \vdots \\ I_1 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Для $4m$-полюсников рассматриваемого типа $A(\omega)$ существует в силу линейности связи между токами и напряжениями, приложенными к зажимам. Заметим, что элементы $A(\omega)$ можно выразить через элементы волновых матриц S и T $4m$-полюсника [6, 7].

Пусть в некотором ортонормированном базисе пространства H матрица $A(\omega)$ задает оператор $A(\omega)$. Определим в этом базисе при помощи матрицы, элементы которой на побочной диагонали равны единице, а на остальных местах — нулю, оператор J ($J = J^*$, $J^2 = I$). Оператор J вводит в H индефинитную метрику с J-скалярным произведением $[\vec{X}, \vec{Y}] = (J\vec{X}, \vec{Y})$, где круглыми скобками обозначено обычное скалярное произведение. Оператор T называется J-нерастягивающим, если для любого $\vec{X} \in H$ $[T\vec{X}, T\vec{X}] \leqslant [\vec{X}, \vec{X}]$.

Используя (1) для получения $J\vec{X}$ и $J\vec{X}'$, имеем

$$[A\vec{X}, A\vec{X}] - [\vec{X}', \vec{X}'] = (J\vec{X}', \vec{X}') = I_1'U_1'^* + \ldots + I_m'U_m'^* + U_m'I_m'^* + \ldots + U_1'I_1'^* = 2\mathrm{Re}\,(U_1'I_1'^* + \ldots + U_m'I_m'^*),$$

$$[\vec{X}, \vec{X}] = 2\mathrm{Re}\,(U_1I_1^* + \ldots + U_mI_m^*).$$

Эффективная мощность, подводимая к зажимам $4m$-полюсника,

$$W_{\text{эф}} = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(U_1I_1^* + \ldots + U_mI_m^*) - \frac{1}{2}\mathrm{Re}\,(U_1'I_1' + \ldots + U_m'I_m'^*) \geqslant 0$$

при $\mathrm{Im}\,\omega \geqslant 0$ (см., например, [5]). Отсюда следует, что $[A\vec{X}, A\vec{X}] \leqslant [\vec{X}, \vec{X}]$, причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда $\mathrm{Im}\,\omega = 0$.

Таким образом, $A(\omega)$ есть оператор-функция, J-нерастягивающая в верхней полуплоскости и J-унитарная на вещественной оси ω. Это свойство можно записать в виде

$$J - A^*JA \geqslant 0,\quad \mathrm{Im}\,\omega \geqslant 0, \tag{2}$$

так как из $(JA\vec{X}, A\vec{X}) \leqslant (J\vec{X}, \vec{X})$ следует $(J\vec{X}, \vec{X}) - (A^*JA\vec{X}, \vec{X}) \geqslant 0$.

Элементы передаточной матрицы являются аналитическими (рациональными) функциями от ω; подобная оператор-функция $A(\omega)$ называется аналитической (в частности, рациональной).

Два многополюсника будем называть эквивалентными, если у них совпадают передаточные матрицы (согласно В. Кауэру [9]).

2. РАЗЛОЖЕНИЕ $A(\omega)$ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ

Для оператор-функций, обладающих свойством (2), этот вопрос рассматривается в [1, 2, 3]. Перед нами стоит задача синтеза матрицы $A(\omega)$ в виде цепочки простейших $4m$-полюсников; поэтому необходимо оператор-функцию $A(\omega)$ разлагать в произведение элементарных множителей. Методами, развитыми в указанных работах, можно получить решение этой за-

дачи, которое мы сформулируем в виде следующей основной теоремы (без доказательства).

Передаточная матрица $A(\omega)$ представима конечным произведением

$$A(\omega) = UB_n(\omega) \ldots B_2(\omega) B_1(\omega), \tag{3}$$

где U — J-унитарный оператор, не зависящий от ω; $B_j(\omega)$ — оператор-функция, обладающая свойством (2) и вычисляемая по формуле

$$B_j(\omega) = I - \frac{i}{\omega - \omega_0} Q_{\alpha_i}, \tag{4}$$

в которой Q_{α_i} имеет вид I или II:

$$I. \qquad Q_{\alpha_i} = -2\operatorname{Im}\omega_0 R_{\alpha_i} = -2\operatorname{Im}\omega_0 JC^*(P_{\alpha_i} CJC^*)^{[-1]} C. \tag{5}$$

Здесь $R^2_{\alpha_i} = R_{\alpha_i}$; C — старший коэффициент лоранова разложения в окрестности полюса ω_0 ($\operatorname{Im}\omega_0 \neq 0$) оператор-функции $A_{j-1}(\omega) = A(\omega) B_1^{-1}(\omega) B_2^{-1}(\omega) \ldots B_{j-1}^{-1}(\omega)$; $CJC^* < 0$; α_i — одно из собственных чисел самосопряженного оператора CJC^*; P_{α_i} — оператор проектирования на одномерное инвариантное подпространство преобразования CJC^*, отвечающее собственному числу α_i.

Под операцией $D^{[-1]}$ понимается обращение оператора, индуцированного самосопряженным оператором D на своей области значений.

$$II. \qquad Q_{\alpha_i} = JC^*[P_{\alpha_i}(-iDJC^*)]^{[-1]} C, \quad Q^2_{\alpha_i} = 0. \tag{6}$$

Здесь $A_{j-1}(\omega) = (\omega - \omega_0)^{-k} C + (\omega - \omega_0)^{-k+1} D + \ldots (\operatorname{Im}\omega_0 = 0)$, причем $C \neq 0$, $CJC^* = 0$; $DJC^* = -CJD^*$; $-iDJC^* > 0$. Выражение $[P_{\alpha_i} \times (-iDJC^*)]^{[-1]}$ определяется аналогично предыдущему.

3. СЛУЧАЙ ПОЛЮСА $A(\omega)$ В ТОЧКАХ 0 и ∞

Рассмотрим важный случай, когда элементы $A(\omega)$ имеют следующий вид: $a_{ik}(\omega) = p_{ik}(\omega) + q_{ik}\left(\frac{1}{\omega}\right)$; где p_{ik}, q_{ik} — некоторые полиномы.

Можно показать, что в этом случае в произведении (3) каждый из множителей $B_j(\omega)$ является физически реализуемым. Для определенности считаем в дальнейшем $n = 4$, $m = 2$ (восьмиполюсник). При этом $B_j(\omega)$ будет матрицей-функцией одного из следующих четырех типов:

$$I. \quad B_j(\omega) = I - \frac{i}{\omega}\left(\begin{array}{c|c} 0 & q \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$II. \quad B_j(\omega) = I - \frac{i}{\omega}\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline q & 0 \end{array}\right),$$

$$III. \quad B_j(\omega) = I + i\omega\left(\begin{array}{c|c} 0 & q \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right),$$

$$IV. \quad B_j(\omega) = I + i\omega\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline q & 0 \end{array}\right),$$

Тип	*I*	*II*	*III*	*IV*
L	—	$1/\rho_3$	ρ_3	—
C	$1/\rho_3$	—	—	ρ_3
K	ρ_2/ρ_1	$-\rho_2/\rho_1$	ρ_2/ρ_1	$-\rho_2/\rho_1$

где $q = \begin{pmatrix} \rho_1 & \rho_2 \\ \rho_3 & \rho_1 \end{pmatrix}$; ρ_1, ρ_2, ρ_3 — вещественные числа, такие, что $\rho_2 \geqslant 0$, $\rho_3 \geqslant 0$, $\rho_1^2 = \rho_2\rho_3$.

Считая $B_j(\omega)$ передаточными матрицами, получаем их реализацию соответственно в виде восьмиполюсников *I* — *IV* (рис. 1). Величины K, L и C см. в таблице.

Если какие-нибудь из коэффициентов p_1, p_2, p_3 обращаются в нуль, то указанные восьмиполюсники вырождаются таким образом, что образуются два не связанных друг с другом четырехполюсника: *12'1'2'* и *34'3'4'*.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Всякий восьмиполюсник (соответственно $4m$-полюсник) с передаточной матрицей указанного типа может быть представлен эквивалентной цепочкой далее не разложимых восьмиполюсников вида $I - IV$ (рис. 1).

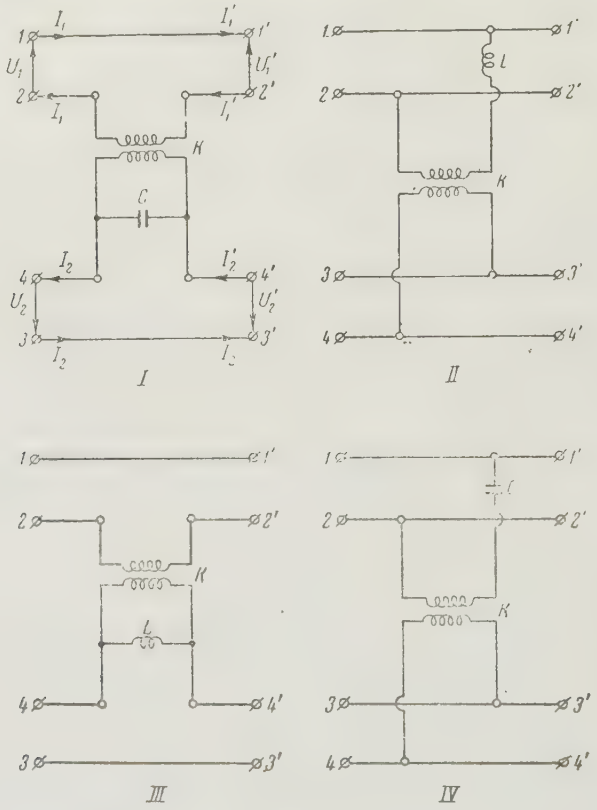


Рис. 1

В случае произвольной передаточной матрицы $A(\omega)$ для цепочечного синтеза необходимо объединять в группы по два или по четыре множители $B_j(\omega)$, соответствующие тем полюсам $A(\omega)$, которые симметричны относительно осей координат. При этом для множителей $B_j(\omega)$, соответствующих полюсам $\omega_0 = 0$ и $\omega_0 = \infty$, остается в силе результат, установленный в § 3.

Выражаю искреннюю признательность М. С. Лившицу за внимание к работе.

Пример

Пусть некоторый восьмиполюсник имеет передаточную матрицу

$$A(\omega) = \left\langle \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{\omega}(-2i) & \frac{1}{\omega}(-3i) \\ 0 & 1 & \frac{1}{\omega}(-12i) & \frac{1}{\omega}(-2i) \\ \hline \frac{1}{\omega}(3i) & \frac{1}{\omega}(-i) & 1+\frac{1}{\omega^2}(-6) & \frac{1}{\omega^2}(7) \\ \frac{1}{\omega}(-9i) & \frac{1}{\omega}(3i) & \frac{1}{\omega^2}(18) & 1+\frac{1}{\omega^2}(-21) \end{array} \right\rangle = \left(\begin{array}{c|c} I & A_b \\ \hline A_c & A_d \end{array} \right).$$

Найдем эквивалентную ему цепочку элементарных восьмиполюсников $I - IV$.

$A(\omega)$ имеет один полюс $\omega_0 = 0$ второго порядка.

$$1.\ A(\omega) = A_1(\omega)\,B_1(\omega);\quad B_1(\omega) = I - \frac{i}{\omega}\,Q_1,$$

где Q_1 вычисляется по формуле (6).

$$C = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 0 & \\ \hline 0 & -6 & 7 \\ & 18 & -21 \end{array}\right),\qquad D = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & & -2i & -3i \\ & & -12i & -2i \\ \hline 3i & -i & & \\ -9i & 3i & 0 & \end{array}\right),$$

$$K_f = -iDJC^* = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & R_f \end{array}\right),\qquad R_f = \begin{pmatrix} 27 & -81 \\ -81 & 243 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{12} & r_{22} \end{pmatrix}.$$

Поскольку $\mathrm{Det}\, R_f = 0$, K_f имеет первый ранг и $P_{\alpha_1}(-iDJC^*) = K_f$. Для приведения K_f к диагональному виду достаточно привести к диагональному виду R_f, для

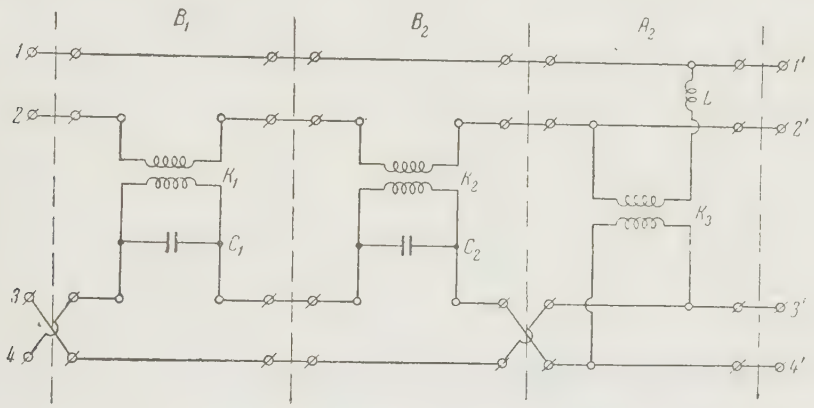


Рис. 2

его в пространстве H от исходного ортонормированного базиса $\{f\}$ перейдем к другому ортонормированному базису $\{e\}$, в котором матрица оператора $-iDJC^*$ будет иметь вид

$$K_e = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & R_e \end{array}\right),\quad R_e = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\alpha_1 = 27 + 243 = 270$$

(α_1 — след оператора R).

Пусть в двумерном подпространстве, соответствующем оператору R, переход от $\{f\}$ к $\{e\}$ задается унитарной матрицей

$$U_2 = \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$R_f = U_2 R_e U_2' = \begin{pmatrix} \alpha_1 u_{11}^2 & \alpha_1 u_{11} u_{21} \\ \alpha_1 u_{11} u_{21} & \alpha_1 u_{21}^2 \end{pmatrix},$$

$$u_{11} = \sqrt{\frac{r_{11}}{\alpha_1}},\quad u_{21} = \sqrt{\frac{r_{22}}{\alpha_1}};$$

$$K_f^{[-1]} = \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline 0 & R_f^{[-1]} \end{array}\right),$$

$$R_f^{[-1]} = U_2 R_e^{[-1]} U_2' = U_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} U_2',\qquad U_2' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2700} & -\frac{1}{900} \\ -\frac{1}{900} & \frac{1}{300} \end{pmatrix}.$$

Вычислив теперь $Q_1 = JC^* K_f^{[-1]} C$, найдем, что

$$B_1(\omega) = I - \frac{i}{\omega}\left(\begin{array}{c|c} 0 & q_1 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \qquad q_1 = \begin{pmatrix} -\frac{14}{9} & \frac{49}{27} \\ \frac{4}{3} & -\frac{14}{9} \end{pmatrix}.$$

2. Замечая, что $B_1^{-1}(\omega) = I + \frac{i}{\omega} Q_1$, перемножением получаем

$$A_1(\omega) = A(\omega) B_1^{-1}(\omega) = \left(\begin{array}{c|c} I & A_1^b \\ \hline A_c & I \end{array}\right), \qquad A_1^b = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega}\left(-\frac{32}{9} i\right) & \frac{1}{\omega}\left(-\frac{32}{27} i\right) \\ \frac{1}{\omega}\left(-\frac{32}{3} i\right) & \frac{1}{\omega}\left(-\frac{32}{9} i\right) \end{pmatrix},$$

$$C_1 = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & -\frac{32}{9} i & -\frac{32}{27} i \\ & -\frac{32}{3} i & -\frac{32}{9} i \\ \hline \begin{matrix} 3i \\ -9i \end{matrix} & \begin{matrix} -i \\ 3i \end{matrix} & 0 \end{array}\right),$$

$$D_1 = I, \quad -iD_1 JC_1^* = \left(\begin{array}{cc|c} \frac{32}{27} & \frac{32}{9} & 0 \\ \frac{32}{9} & \frac{32}{3} & \\ \hline 0 & & \begin{matrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{matrix} \end{array}\right) = \left[\begin{array}{c|c} R_{1f} & 0 \\ \hline 0 & R_{2f} \end{array}\right],$$

R_{1f} и R_{2f} — матрицы первого ранга. В некотором новом базисе $\{e\}$

$$-iD_1 JC_1^* = \left(\begin{array}{c|c} R_{1e} & 0 \\ \hline 0 & R_{2e} \end{array}\right), \quad R_{1e} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R_{2e} = \begin{pmatrix} \alpha_2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_1 = \frac{320}{27},$$

$$K_e = P_{\alpha_1}(-iD_1 JC_1^*) = \left(\begin{array}{c|c} R_{1e} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

В базисе $\{f\}$

$$K_f^{[-1]} = \left(\begin{array}{c|c} R_{1f}^{[-1]} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right).$$

Используя результаты предыдущего пункта, имеем

$$R_{1f}^{[-1]} = \begin{pmatrix} \frac{27}{3200} & \frac{81}{3200} \\ \frac{81}{3200} & \frac{243}{3200} \end{pmatrix}, \qquad B_2(\omega) = I - \frac{i}{\omega} Q_2,$$

$$Q_2 = JC_1^* K_f^{[-1]} C_1,$$

$$Q_2 = \left(\begin{array}{c|c} 0 & q_2 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right), \qquad q_2 = \begin{pmatrix} \frac{32}{9} & \frac{32}{27} \\ \frac{32}{3} & \frac{32}{9} \end{pmatrix}, \quad A_1(\omega) = A_2(\omega) B_2(\omega),$$

$$A_2(\omega) = A_1(\omega) B_2^{-1}(\omega) = I - \frac{i}{\omega}\left(\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline q_3 & 0 \end{array}\right), \qquad q_3 = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 9 & -3 \end{pmatrix},$$

$$A(\omega) = A_2(\omega) B_2(\omega) B_1(\omega).$$

Матрицы $B_1(\omega)$ и $B_2(\omega)$ являются матрицами типа I, $A_2(\omega)$ — типа II (см. стр. 1841, §3). Факторизация $A(\omega)$ закончена. Искомая цепочка восьмиполюсников показана на рис. 2. Из свойств произведения (3) устанавливается, что в нашем примере все три восьмиполюсника перестановочны между собой.

В силу соотношений таблицы $K_1 = -{}^7/_6$; $K_2 = {}^1/_3$; $K_3 = {}^1/_3$; $C_1 = {}^3/_4$; $C_2 = {}^3/_{32}$; $L = {}^1/_9$.

ЛИТЕРАТУРА

. М. С. Бродский, М. С. Лившиц, Спектральный анализ несамосопряженных операторов и промежуточные системы, Успехи матем. наук, 1958, **13**. 1(79), 3.

. В. П. Потапов, Мультипликативная структура J-нерастягивающих матриц-функций, Тр. Моск. матем. о-ва, 1954, **4**, 125.

. Ю. П. Гинзбург, О J-нерастягивающих оператор-функциях, Докл. АН СССР, 1957, **117**, 2, 171.

. М. С. Лившиц, Э. С. Флексер, Разложение реактивного четырехполюсника в цепочку простейших четырехполюсников, Докл. АН СССР, 1960, **135**, 3, 542.

. В. А. Тафт, Основы методики расчета линейных электрических цепей по заданным их частотным характеристикам, Изд. АН СССР, 1954.

. Л. Р. Явич, Волновые матрицы четырехполюсника, Радиотехника и электроника, 1957, **2**, 7, 870.

. Р. А. Силин, Свойства волновых матриц 2 (P + 1)-полюсника, Радиотехника и электроника, 1959, **4**, 10, 1628.

. A. Talbot, New method of synthesis of reactance networks, Proc. I. E. E., 1954, **101**, pt. 4, Monograph № 77, p. 73.

. W. Cauer, Theorie der linearen Wechselstromschaltungen, Akademie-Verlag, Berlin, 1954.

Поступила в редакцию
3 III 1961

1961 № 11

КОРРЕЛЯЦИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОЛЯ ЛИНЕЙНОЙ АНТЕННЫ

Я. С. Шифрин

Рассмотрены корреляционные характеристики поля линейной синфазной антенны при наличии случайных фазовых ошибок источников. Найденная корреляционная функция используется для нахождения функционала распределения огибающей диаграммы направленности антенны.

ВВЕДЕНИЕ

В опубликованных до настоящего времени работах по статистической оценке параметров антенных систем [1—4] основное внимание уделено нахождению средних (во времени или по семейству однотипных антенн) характеристик направленности и средних значений некоторых антенных параметров, в частности коэффициента направленного действия.

Следующим шагом на пути изучения статистических свойств поля антенны является, естественно, исследование вопроса о флуктуациях тех или иных параметров. Этот вопрос частично рассмотрен в работе [3]. Существует, однако, ряд практически важных задач, для решения которых знание средних значений и флуктуаций поля недостаточно и требуется более глубокое изучение статистики антенн. Такое более полное описание статистики поля может быть получено при помощи корреляционных характеристик. При этом если поле антенны является нормальной случайной функцией, то описание статистики при помощи корреляционных функций является исчерпывающим.

Примером задачи, для решения которой необходимо знание корреляционных функций, является весьма интересная задача о нахождении вероятности того, что диаграмма направленности антенны в некотором заданном секторе $\psi_1 — \psi_2$ не выйдет за определенный уровень, характеризуемый на интервале $\psi_1 — \psi_2$ функцией $v(\psi)$.

Такая задача представляет практический интерес при оценке пригодности антенны по боковым лепесткам ее диаграммы *.

Решение этой и подобных ей задач означает нахождение функционалов распределения действительных случайных функций. Для нормально распределенной случайной функции приближенное значение функционала распределения можно определить, если по известной корреляционной функции найти интервал корреляции и установить далее вероятность совместного осуществления ряда независимых событий.

Таким образом, для нормально распределенных функций задача сводится к отысканию корреляционных функций. К сожалению, модуль комплексного множителя системы, характеризующий диаграмму направленности, не является нормально распределенной функцией. Несмотря на это, функционал распределения для модуля множителя системы может быть, как мы ниже увидим, найден по известной корреляционной функции для поля.

---

* Следует заметить, что при учете статистической природы поля антенны требование по боковым лепесткам должно быть сформулировано примерно так: антенна считается пригодной, если вероятность того, что диаграмма направленности антенны в заданном секторе не выходит за определенный уровень, не меньше заданной величины.

В настоящей работе определяется корреляционная функция поля линейной синфазной антенны при наличии случайных фазовых ошибок источников. Корреляционная функция используется далее для нахождения функционала распределения огибающей диаграммы направленности. Полученные в § 1—3 результаты одинаково пригодны как для временной статистики, так и для статистики по семейству однотипных антенн. В § 4 производится количественная оценка функционала для случая, когда фазовые ошибки источников являются следствием неточности изготовления поверхности антенны.

Фазовые ошибки предполагаются малыми.

1. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Множитель системы $f(\psi)$ для линейной синфазной антенны с амплитудным законом распределения $A(x)$ имеет при учете случайных фазовых ошибок, характеризуемых случайной функцией $\varphi(x)$, следующий вид *:

$$f(\psi) = \int_{-1}^{+1} A(x)\, e^{j[\varphi(x)+\psi x]}\, dx,$$

где $\psi = \frac{\pi L}{\lambda} \sin\theta$; θ — угол, отсчитываемый от нормали к системе; λ — длина волны; L — длина системы.

Полагая фазовые ошибки малыми, получим

$$f(\psi) = \int_{-1}^{+1} A(x)\, e^{j\psi x} dx + j \int_{-1}^{+1} \varphi(x)\, A(x)\, e^{j\psi x} dx. \tag{1}$$

Принимая $\overline{\varphi(x)} = 0$, находим среднее значение множителя системы

$$\overline{f(\psi)} = \int_{-1}^{+1} A(x)\, e^{j\psi x} dx = f_0(\psi),$$

где $f_0(\psi)$ — множитель системы в отсутствие ошибок. Флуктуация поля

$$\Delta f(\psi) = j \int_{-1}^{+1} \varphi(x)\, A(x)\, e^{j\psi x} dx. \tag{2}$$

Корреляционную функцию случайной комплексной функции $f(\psi)$ можно по определению [5] записать в виде

$$K_f(\psi; \psi_1) = \overline{\Delta f(\psi)\, \Delta f^*(\psi_1)}. \tag{3}$$

Нормированная корреляционная функция будет

$$R_f(\psi; \psi_1) = \frac{K_f(\psi; \psi_1)}{\sqrt{K_f(\psi; \psi)\, K_f(\psi_1; \psi_1)}}. \tag{4}$$

Используя соотношение (2), находим

$$K_f(\psi; \psi_1) = \int_{-1}^{+1}\int \overline{\varphi(x)\, \varphi(x_1)}\, A(x)\, A(x_1)\, e^{j\psi x - j\psi_1 x_1} dx\, dx_1 =$$

$$= \int_{-1}^{+1}\int r\sigma(x)\, \sigma(x_1)\, A(x)\, A(x_1)\, e^{j\psi x - j\psi_1 x_1} dx\, dx_1,$$

* Мы опустили не имеющий значения множитель $L/2$.

где r — коэффициент корреляции между значениями фазы в точках x и x_1; $\sigma(x)$ — среднеквадратичное значение фазы [$\sigma^2(x) = \overline{\varphi^2(x)}$].

Примем далее коэффициент корреляции r в виде $r = e^{-\frac{(x-x_1)^2}{c^2}}$, где $c = 2\rho/L$ (ρ — интервал корреляции).

Тогда

$$K_f(\psi;\psi_1) = \int_{-1}^{+1}\int \sigma(x)\,\sigma(x_1)\,A(x)\,A(x_1)\,e^{-\frac{(x-x_1)^2}{c^2}+j\psi x - j\psi_1 x_1}\,dx\,dx_1.$$

Ограничимся далее рассмотрением случая равномерного амплитудного распределения $A(x) = 1$ и равномерно распределенных ошибок $\sigma(x) = \sigma_0$. В этом случае

$$K_f(\psi;\psi_1) = \sigma_0^2\int_{-1}^{+1}\int e^{-\frac{(x-x_1)^2}{c^2}+j\psi x - j\psi_1 x_1}\,dx\,dx_1. \qquad (5)$$

Входящий в соотношение (5) двойной интеграл I может быть вычислен точно. Как показано в Приложении 1, окончательное выражение таково:

$$I(\psi;\psi_1) = \int_{-1}^{+1}\int e^{-\frac{(x-x_1)^2}{c^2}+j\psi x - j\psi_1 x_1}\,dx\,dx_1 = c\sqrt{\pi}\,\frac{\sin(\psi-\psi_1)}{\psi-\psi_1}\times$$

$$\times\left\{e^{-\frac{\psi_1^2c^2}{4}}\operatorname{Re}\Phi\left(\frac{2}{c}-j\frac{\psi_1 c}{2}\right)+e^{-\frac{\psi^2c^2}{4}}\operatorname{Re}\Phi\left(\frac{2}{c}-j\frac{\psi c}{2}\right)\right\}-2c\,\frac{\cos(\psi-\psi_1)}{\psi-\psi_1}\times$$

$$\times\left\{\left[F\left(\frac{\psi c}{2}\right)-F\left(\frac{\psi_1 c}{2}\right)\right]+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[e^{-\frac{\psi^2c^2}{4}}\operatorname{Im}\Phi\left(\frac{2}{c}-j\frac{\psi c}{2}\right)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-e^{-\frac{\psi_1^2c^2}{4}}\operatorname{Im}\Phi\left(\frac{2}{c}-j\frac{\psi_1 c}{2}\right)\right]\right\}, \qquad (6)$$

где

$$\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}\,dt; \quad F(z) = e^{-z^2}\int_0^z e^{t^2}\,dt.$$

Полагая в соотношении (6) $\psi = \psi_1$, получим после ряда несложных выкладок

$$I_0(\psi) = \int_{-1}^{+1}\int e^{-\frac{(x-x_1)^2}{c^2}+j\psi(x-x_1)}\,dx\,dx_1 = \sqrt{\pi}\,c^2 e^{-\frac{\psi^2c^2}{4}}\operatorname{Re}\left[\left(\frac{2}{c}+j\frac{\psi c}{2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times\,\Phi\left(\frac{2}{c}+j\,\frac{\psi c}{2}\right)\right]-c^2\left[1-\psi c F\left(\frac{\psi c}{2}\right)-e^{-\frac{4}{c^2}}\cos 2\psi\right]. \qquad (7)$$

Соотношения (6) и (7) позволяют произвести расчет функций

$$K_f = \sigma_0^2 I(\psi;\psi_1), \quad R_f = \frac{I(\psi;\psi_1)}{\sqrt{I_0(\psi)\,I_0(\psi_1)}}$$

при любом значении параметра c, т. е. при любом отношении интервала корреляции фазовых ошибок ρ к размеру антенны L.

Представляет интерес рассмотреть характер изменения нормированной корреляционной функции R_f по мере изменения параметра c. С это

целью положим $\psi_1 = 0$ и рассчитаем величину $R_f(0, \psi)$, равную

$$R_f(0, \psi) = \frac{I(0, \psi)}{\sqrt{I_0(0)\, I_0(\psi)}}, \tag{8}$$

где

$$I(0, \psi) = c\sqrt{\pi}\,\frac{\sin\psi}{\psi}\left[\Phi\left(\frac{2}{c}\right) + e^{-\frac{\psi^2 c^2}{4}}\,\mathrm{Re}\,\Phi\left(\frac{2}{c} - j\frac{\psi c}{2}\right)\right] -$$

$$- 2c\,\frac{\cos\psi}{\psi}\left[F\left(\frac{\psi c}{2}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-\frac{\psi^2 c^2}{4}}\,\mathrm{Im}\,\Phi\left(\frac{2}{c} - j\frac{\psi c}{2}\right)\right]; \tag{9}$$

$$I_0(0) = 2\sqrt{\pi}\,c\Phi\left(\frac{2}{c}\right) - c^2\left(1 - e^{-\frac{4}{c^2}}\right), \tag{10}$$

$I_0(\psi)$ определяется соотношением (7).

Выражения (7) и (9) содержат интеграл вероятности от комплексного аргумента. Для расчета удобно вместо $\Phi(z)$ использовать функцию $W(z)$, определяемую равенством

$$W(z) = e^{-z^2}\left(1 + \frac{2j}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{t^2}dt\right),$$

для которой имеются подробные таблицы [6]. Для использования этих таблиц необходимо заменить в выражениях (7) и (9) функцию $\Phi(z)$ функцией $W(z)$. Учитывая соотношение $\Phi(z) = e^{-z^2} W(-jz) - 1$, нетрудно преобразовать выражения (7) и (9) к следующему виду:

$$I_0(\psi) = 2c\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{\psi^2 c^2}{4}} + c^2\sqrt{\pi}\,e^{-\frac{4}{c^2}}\,[(yV - xU)\sin 2\psi - (yU + xV)\cos 2\psi] -$$

$$- c^2\left[1 - \psi c F\left(\frac{\psi c}{2}\right) - e^{-\frac{4}{c^2}}\cos 2\psi\right], \tag{7а}$$

$$I(0, \psi) = c\sqrt{\pi}\,\frac{\sin\psi}{\psi}\left\{\Phi\left(\frac{2}{c}\right) + e^{-\frac{\psi^2 c^2}{4}} - e^{-\frac{4}{c^2}}\,[U\cos 2\psi - V\sin 2\psi]\right\} -$$

$$- 2c\,\frac{\cos\psi}{\psi}\left\{F\left(\frac{\psi c}{2}\right) - \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-\frac{4}{c^2}}\,[V\cos 2\psi + U\sin 2\psi]\right\}, \tag{9а}$$

где

$$U = \mathrm{Re}\,W(z);\ V = \mathrm{Im}\,W(z);\ z = x + jy = \frac{\psi c}{2} + j\frac{2}{c}.$$

При $|z| \gg 1$ и $|\arg z| < \frac{\pi}{2} - \delta$ $(\delta > 0)$, используя асимптотическое выражение для интеграла вероятности

$$\Phi(z) \simeq 1 - \frac{e^{-z^2}}{\sqrt{\pi}\,z} + \frac{e^{-z^2}}{2\sqrt{\pi}\,z^3},$$

получим из (8) и (10) следующие выражения:

$$I_0(\psi) \simeq 2\sqrt{\pi}\,ce^{-\frac{\psi^2 c^2}{4}} - c^2\left[1 - \psi c F\left(\frac{\psi c}{2}\right)\right] +$$

$$+ \frac{c^2}{2}\,e^{-\frac{4}{c^2}}\,\frac{\left[\left(\frac{4}{c^2} - \frac{\psi^2 c^2}{4}\right)\cos 2\psi - 2\psi\sin 2\psi\right]}{\left[\left(\frac{4}{c^2} - \frac{\psi^2 c^2}{4}\right)^2 + 4\psi^2\right]}, \tag{7б}$$

$$I(0,\psi) \simeq c\sqrt{\pi}\,\frac{\sin\psi}{\psi}\left[\Phi\left(\frac{2}{c}\right)+e^{-\frac{\psi^2c^2}{4}}\right]-2c\,\frac{\cos\psi}{\psi}F\left(\frac{\psi c}{2}\right)+$$

$$+\frac{ce^{-\frac{4}{c^2}}}{\frac{4}{c^2}+\frac{\psi^2c^2}{4}}\left[\frac{2}{c}\,\frac{\sin\psi}{\psi}+\frac{c}{2}\cos\psi\right]. \qquad (9б)$$

Используя точные выражения (10) и (7а), (9а) или (при $|z| \geqslant 1$) асимптотические выражения (7б) и (9б), можно по формуле (8) вычислить $R_f(0,\psi)$ при различных значениях параметра c.

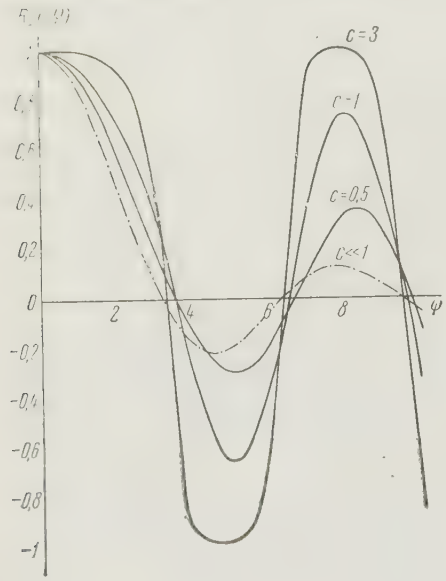


Рис. 1

Результаты расчета величины $R_f(0,\psi)$ для ряда значений параметра c приведены на рис. 1. Как видно из рисунка, уже при $c \sim 3\left(\rho \sim \frac{3}{2}L\right)$ нормированная корреляционная функция $R_f(0,\psi)$ по модулю близка к единице во всем рассматриваемом нами интервале изменения величины ψ ($\psi \leqslant 10$). По мере уменьшения c корреляционное расстояние также уменьшается.

В предельном случае $c \ll 1$, удерживая в общих соотношениях (6) и (7) лишь первые члены асимптотики по c, получим

$$K_f(\psi;\psi_1) \simeq 2\sqrt{\pi}\,c\,\sigma_0^2\,\frac{\sin(\psi-\psi_1)}{\psi-\psi_1},$$

$$R_f(\psi;\psi_1) \simeq \frac{\sin(\psi-\psi_1)}{\psi-\psi_1}. \qquad (11)$$

Из соотношений (11) видно, что при $c \ll 1$ корреляционная функция зависит лишь от разности аргументов $\psi - \psi_1$, а интервал корреляции для функции $f(\psi)$ составляет величину порядка π.

Функция $\sin\psi/\psi$, равная $R_f(0,\psi)$ при $c \ll 1$, показана на рис. 1 пунктирной линией.

Случай $c \ll 1$ представляет особый интерес. Именно он имеет место при изучении семейственной статистики антенн, обусловленной производственными допусками на изготовление поверхности антенны.

Интервал корреляции ρ фазовых ошибок, связанных с неточностью изготовления антенн, составляет, как правило, величину порядка λ [3], а размеры антенны L — много больше λ.

Условие $c \ll 1$ обычно выполняется и в случае, когда фазовые флуктуации источников являются следствием временных деформаций поверхности антенны.

2. ФУНКЦИОНАЛ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ

При изучении функционала распределения диаграммы направленности ограничимся случаем $c \ll 1$ ($\rho \ll L$). Если $c \ll 1$, то второй интеграл, входящий в формулу (1), можно представить в виде суммы большого числа слабо зависимых слагаемых. Отсюда, на основании центральной предель-

ной теоремы, можно сделать вывод, что случайная функция $f(\psi)$ имеет нормальный закон распределения *.

Последнее, в частности, означает, что:

а) при любом фиксированном ψ вещественная и мнимая части комплексного множителя системы $f(\psi)$ подчиняются двумерному нормальному распределению;

б) равенство нулю корреляционной функции при некотором значении $\psi - \psi_1$ свидетельствует о независимости случайных величин $f(\psi)$ и $f(\psi_1)$.

Как отмечено выше, при $c \ll 1$ интервал корреляции для функции $f(\psi)$ составляет величину порядка π. Отсюда следует, что значения модуля (или фазы) функции $f(\psi)$ в точках, разделенных интервалом порядка π, также будут независимыми.

Заметим далее, что при $A(x) = 1$ диаграмма направленности системы в отсутствие ошибок будет

$$f_0(\psi) = 2\frac{\sin\psi}{\psi}.$$

Первый максимум соответствует $\psi = 0$. Положение остальных максимумов модуля $f_0(\psi)$ определяется корнями трансцендентного уравнения $\operatorname{tg}\psi = \psi$. Приближенно корни этого уравнения будут

$$\psi_k \simeq (2k+1)\frac{\pi}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots.$$

Таким образом, максимумы функции $|f_0(\psi)|$ разделены интервалами порядка π.

Переходя к рассмотрению функционала распределения диаграммы направленности при наличии ошибок, заметим, что при изучении проблемы боковых лепестков нас интересует по сути дела огибающая диаграмма направленности. При малых ошибках поведение огибающей определяется значениями модуля $f(\psi)$ в точках ψ_k. Отсюда ясно, что для нахождения приближенного значения функционала распределения диаграммы направленности (точнее, функционала распределения огибающей) надо сперва рассчитать вероятности P_k того, что значения $|f(\psi)|$ в точках ψ_k не превышают значений функции $v(\psi)$ в этих же точках, а затем, учитывая независимость значений модуля в точках ψ_k, взять произведение найденных значений P_k.

Итак, прежде всего необходимо найти интегральный закон распределения огибающей (модуля) в точках ψ_k. Случайная величина $|f(\psi)|$ представляет собой длину вектора с составляющими $a = \operatorname{Re} f(\psi)$ и $b = \operatorname{Im} f(\psi)$. Как следует из соотношения (1), величины a и b определяются выражениями **

$$a = \int_{-1}^{+1} A(x)\cos\psi x\,dx - \int_{-1}^{+1} A(x)\,\varphi(x)\sin\psi x\,dx,$$

$$b = \int_{-1}^{+1} A(x)\sin\psi x\,dx + \int_{-1}^{+1} A(x)\,\varphi(x)\cos\psi\,x\,dx = \int_{-1}^{+1} A(x)\,\varphi(x)\cos\psi x\,dx.$$

---

* Для того чтобы функция $f(\psi)$ была нормально распределенной случайной функцией при произвольном c, необходимо, чтобы случайная функция $\varphi(x)$, характеризующая фазовые ошибки, была нормальной.

** Функция $A(x)$ предполагается четной.

Величины a и b распределены нормально со средними значениями

$$\bar{a} = \int_{-1}^{+1} A(x) \cos \psi x \, dx, \quad \bar{b} = 0$$

и с дисперсиями, равными (см. Приложение 2)

$$\begin{aligned} \sigma_a^2 &\simeq \sqrt{\pi}\, c e^{-\frac{\psi^2 c^2}{4}} \int_{-1}^{+1} A^2(x)\, \sigma^2(x) \sin^2 \psi x \, dx, \\ \sigma_b^2 &\simeq \sqrt{\pi}\, c e^{-\frac{\psi^2 c^2}{4}} \int_{-1}^{+1} A^2(x)\, \sigma^2(x) \cos^2 \psi x \, dx. \end{aligned} \tag{12}$$

Корреляционный момент величин a и b будет

$$K_{ab} \simeq \sqrt{\pi}\, c e^{-\frac{\psi^2 c^2}{4}} \int_{-1}^{+1} A^2(x)\, \sigma^2(x) \sin \psi x \cos \psi x \, dx.$$

При четных законах $A(x)$ и $\sigma(x)$ корреляционный момент равен нулю. Равенство нулю корреляционного момента при нормальном законе распределения совокупности величин a и b означает их независимость.

Для случая $A(x) = 1$ и $\sigma(x) = \sigma_0$ соотношения (12) можно переписать в виде

$$\sigma_a^2 \simeq \sqrt{\pi}\, c e^{-\frac{\psi^2 c^2}{4}} \sigma_0^2 \left(1 - \frac{\sin 2\psi}{2\psi}\right), \quad \sigma_b^2 \simeq \sqrt{\pi}\, c e^{-\frac{\psi^2 c^2}{4}} \sigma_0^2 \left(1 + \frac{\sin 2\psi}{2\psi}\right).$$

В точках $\psi_k \simeq (2k+1)\frac{\pi}{2}$ $\sin 2\psi \simeq 0$, т. е. дисперсии σ_a и σ_b в этих точках — σ_{ak} и σ_{bk} одинаковы:

$$\sigma_{ak}^2 \simeq \sigma_{bk}^2 \simeq \sqrt{\pi}\, c \sigma_0^2 e^{-\frac{\psi_k^2 c^2}{4}} = \sigma_k^2. \tag{13}$$

Таким образом, задача о нахождении закона распределения модуля $f(\psi)$ в точках ψ_k сводится к задаче о распределении длины вектора, составляющие которого a и b независимы и распределены нормально с параметрами $(\bar{a}, \sigma_k)$ и $(0, \sigma_k)$.

Решение этой задачи хорошо известно [7]. Функция распределения длины вектора представляет собой обобщенную функцию распределения Релея

$$\omega_k(\rho) = \frac{\rho}{\sigma_k^2} e^{-\frac{\rho^2 + \bar{a}_k^2}{2\sigma_k^2}} I_0\left(\frac{\bar{a}_k \rho}{\sigma_k^2}\right), \tag{14}$$

где

$$\rho = |f(\psi)|; \quad \bar{a}_k = 2\frac{\sin \psi_k}{\psi_k} \simeq \frac{4}{(2k+1)\pi};$$

I_0 — модифицированная функция Бесселя нулевого порядка.

Интегральный закон распределения $|f(\psi)|$ в точках ψ_k будет

$$P_k(|f(\psi_k)| \leqslant v(\psi_k)) = e^{-\frac{[v(\psi_k)]^2 + \bar{a}_k^2}{2\sigma_k^2}} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{v(\psi_k)}{\bar{a}_k}\right)^n I_n\left(\frac{\bar{a}_k v(\psi_k)}{\sigma_k^2}\right). \tag{15}$$

Кривые интегрального закона распределения приведены на рис. 2.

Для случая, когда $v(\psi)$ совпадает с теоретической огибающей, $v(\psi_k) = \bar{a}_k$ и величины P_k определяются по формуле

$$P_k = e^{-\frac{\bar{a}_k^2}{\sigma_k^2}} \sum_{n=1}^{\infty} I_n\left(\frac{a_k^2}{\sigma_k^2}\right).$$

Если ошибки малы, так что имеет место неравенство $\bar{a}_k/\sigma_k \gg 1$, то обобщенный закон Релея (14) переходит в нормальный закон с параметрами a_k и σ_k. Интегральная функция распределения в этом случае будет

$$P_k \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_k} \int_{-\infty}^{v(\psi_k)} e^{-\frac{(\xi-\bar{a}_k)^2}{2\sigma_k^2}}\, d\xi = F\left(\frac{v(\psi_k) - \bar{a}_k}{\sigma_k}\right). \qquad (16)$$

Кривая интегрального нормального закона распределения $F(x)$ приведена на рис. 3.

Функционал распределения огибающей находим как произведение величин P_k. При этом надо иметь в виду, что для каждого k имеем две точки, расположенные симметрично по обе стороны от направления мак-

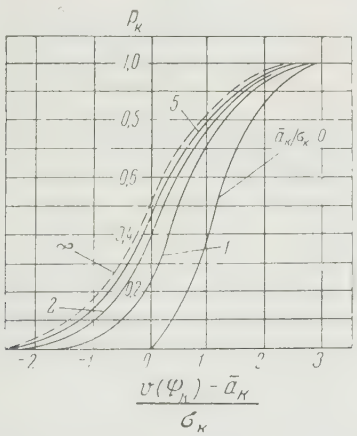


Рис. 2

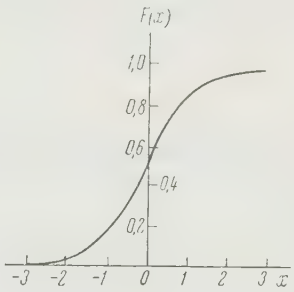


Рис. 3

имума ($\psi = 0$). В общем случае значения $v(\psi_k)$ в этих точках могут ыть не равны. Соответственно разными будут и значения P_k в этих чках.

Однако обычно функция $v(\psi)$ будет четной. При этом функционал аспределения огибающей можно записать в виде

$$P_{v(\psi)} = \prod_{k=1}^{N} P_k^2. \qquad (17)$$

3. КОЛИЧЕСТВЕННАЯ ОЦЕНКА ВЕЛИЧИНЫ P

Переходя к рассмотрению некоторых примеров, необходимо прежде его отметить, что апертурный метод расчета антенн используется обычно я нахождения главного лепестка и нескольких ближайших к нему ковых лепестков. Это обстоятельство предопределяет интервал зна- ний ψ, для которого целесообразно использовать полученные выше зультаты. Если при этом ошибки настолько малы, что для крайней

изучаемой точки ψ_N выполняется неравенство $\bar{a}_N/\sigma_N \gg 1$, то величину P находим по формуле

$$P_{v(\psi)} = \prod_{k=1}^{N} F_k^2, \tag{18}$$

где F_k определяется соотношением (16), т. е.

$$F_k = F(\delta_k), \tag{19}$$

где

$$\delta_k = \frac{v(\psi_k) - \bar{a}_k}{\sigma_k}.$$

В частности, вероятность того, что на участке $\pm\psi_N$ диаграмма не выйдет за теоретическую огибающую ($\delta_k = 0$), будет

$$P = \prod_{k=1}^{N} F^2(0) = 0{,}25^N, \tag{20}$$

где N — число рассматриваемых боковых лепестков.

Рассмотрим далее в качестве конкретного примера случай, когда флуктуации поля являются следствием неточности изготовления поверхности зеркальной антенны. В этом случае можно для оценки величины σ_0 использовать соображения, приведенные в работе [3]. Считая относительный допуск на изготовление поверхности антенны заданным (по технологическим возможностям), автор этой работы получает следующее выражение для среднеквадратичного отклонения фаз источников:

$$\sigma_0 \simeq 5\frac{L}{\lambda}10^{-m}, \tag{21}$$

где L — линейный размер антенны; m — величина, характеризующая относительный допуск на изготовление антенны. Она определяется соотношением

$$10^{-m} = \frac{\varepsilon}{L},$$

где ε — допуск на изготовление поверхности антенны, который можно гарантировать с вероятностью 0,99.

Определим теперь величину c. Как было выше отмечено, интервал корреляции составляет обычно величину порядка λ. Так как общая длина антенны в безразмерных единицах равна 2 (x изменяется от -1 до $+1$), то

$$c \simeq 2\frac{\lambda}{L}. \tag{22}$$

Используя соотношения (13) и (21), (22) находим

$$\sigma_k \simeq 9{,}4\cdot 10^{1-m}\sqrt{\frac{L}{\lambda}}\,e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\lambda}{L}\frac{(2k+1)\pi}{2}\right]^2}. \tag{23}$$

Ограничимся значениями $k \leqslant 3$ и положим $L/\lambda > 10$. Тогда

$$e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{\lambda}{L}\frac{(2k+1)\pi}{2}\right]^2} \simeq 1,$$

$$\sigma_k \simeq 10^{-m}\sqrt{\frac{L}{\lambda}}. \tag{24}$$

Полагая, например, далее $m = 3$ * и учитывая, что $\bar{a}_k = 4/(2k+1)\,\pi$, находим, что в диапазоне

$$10 < \frac{L}{\lambda} < 50 \qquad (25)$$

имеет место неравенство $\bar{a}_k/\sigma_k \gg 1$. Таким образом, при $k \leqslant 3$, $m = 3$ и L/λ, удовлетворяющем неравенству (25), расчет величины P можно проводить по формулам (18), (19).

На рис. 4 приведены три функции $v(\psi)$. Первая $v_1(\psi)$ совпадает с теоретической огибающей. Вероятность того, что на участке $\pm\psi_3$ диаграмма направленности не выйдет за $v_1(\psi)$, в соответствии с соотношением (20) будет $P_{v_1(\psi)} \simeq 0{,}016 = 2\%$.

Кривые $v_{2,3}(\psi)$ проведены через точки $\bar{a}_k + 2\sigma_k$. При этом $v_2(\psi)$ соответствует $L/\lambda = 10$; $v_3(\psi)$ соответствует $L/\lambda = 50$. В обоих случаях $\delta_k = 2$ и в соответствии с соотношениями (18), (19) $P = F^6$ (2). Используя таблицы для функции F [7], находим $F(2) = 0{,}977$, а $P = 0{,}86$.

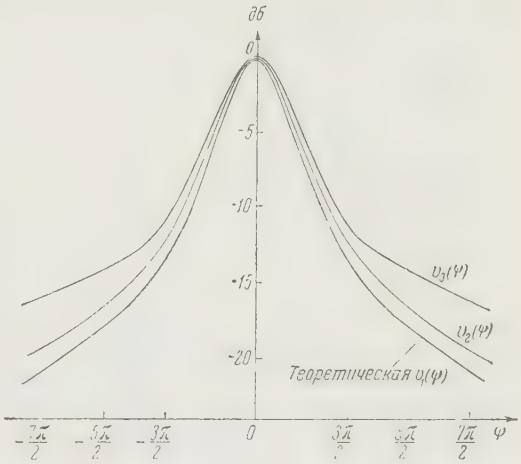


Рис. 4

Таким образом, можно сказать, что с вероятностью 86% диаграмма направленности антенны на участке $\pm\psi_3\left(\pm\frac{7\pi}{2}\right)$ не выйдет за пределы $v_2(\psi)$ для системы длиной 10 λ и $v_3(\psi)$ — для системы длиной 50 λ.

В таблице приведены рассчитанные по формуле (23) значения σ_k для $L/\lambda = 10$ и $L/\lambda = 50$. В ней же указаны уровни боковых лепестков, соответствующие кривым $v_2(\psi)$ и $v_3(\psi)$.

Следует заметить, что если в точке ψ_k имеет место неравенство $\sigma_k/\bar{a}_k \ll 1$, то изменение уровня бокового излучения по сравнению с теоретическим будет

$$\Delta_k\,(дб) = 20\lg\frac{\bar{a}_k + \delta_k\sigma_k}{\bar{a}_k} = 8{,}6\ln\left(1 + \frac{\delta_k\sigma_k}{\bar{a}_k}\right) \simeq 8{,}6\,\frac{\delta_k\sigma_k}{\bar{a}_k}.$$

σ_k		Уровень боковых лепестков, дб		
$L/\lambda = 10$	$L/\lambda = 50$	теорет. $v_1(\psi)$	$v_2(\psi)$	$v_3(\psi)$
0,027	0,065	—13,3	—12,4	—11,1
0,021	0,066	—17,7	—16,6	—14,3
0,016	0,066	—20,8	—19,4	—16,1

Отсюда, в частности, следует, что величина $\Delta_k\,(дб)$ пропорциональна допуску ε. Это обстоятельство необходимо иметь в виду при анализе данных, приведенных в таблице. Сравнительно невысокий рост уровня боковых лепестков связан с принятой нами весьма высокой точностью изготовления системы. Предположение о том, что $m = 3$, означает, например, что система длиной в 1 *м* изготовлена с допуском $\varepsilon = 1$ *мм*. Увеличение допуска ε, например, в 2 раза приведет к увеличению величины $\Delta_k\,(дб)$ также в 2 раза.

Приведенный выше пример иллюстрирует порядок расчета величины P для заданной функции $v(\psi)$, заданном интервале значений ψ и известной точности изготовления антенны m.

* Значение $m = 3$ соответствует весьма тщательному изготовлению поверхности антенны.

Полученные выше результаты могут быть использованы и для решения обратной задачи — по заданным боковым лепесткам определить необходимую точность изготовления антенны.

Рассмотрим в качестве простейшего примера следующую задачу: определить необходимую точность изготовления антенны длиной L при условии, чтобы с вероятностью P уровень первого бокового лепестка не превышал — M *дб*.

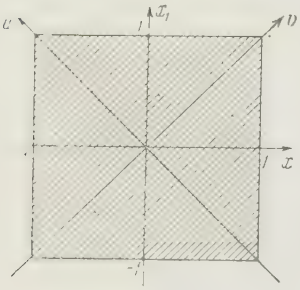


Рис. 5

Из соотношения (17) имеем $P = P_1^2$, т. е. $P_1 = \sqrt{P}$.

Определим величину $v(\psi_1)$:

$$20 \lg \frac{v(\psi_1)}{2} = -M.$$

Отсюда

$$v(\psi_1) = 2 \cdot 10^{-\frac{M}{20}}.$$

По рис. 2 или по таблицам для функции P_1 находим σ_1. Если при этом мы ожидаем, что $a_1/\sigma_1 \gg 1$ (что необходимо впоследствии проверить), то можно использовать рис. 3 или таблицу для функции F.

Используя далее соотношение (23) или (24), находим величину m и соответственно ε. Так, если воспользоваться выражением (24), то

$$10^m \simeq 10 \sqrt{\frac{L}{\lambda}} \frac{1}{\sigma_1}.$$

Пусть, например, $L/\lambda = 40$, $P = 0{,}9$, $M = -10$ *дб*. Тогда $P_1 = 0{,}95$, $v(\psi_1) = 2 \cdot 10^{-\frac{1}{2}} = 0{,}635$.

Полагая $\bar{a}_1/\sigma_1 \gg 1$ *, имеем $P_1 = F(\delta_1) = 0{,}95$. Отсюда $\delta_1 = 1{,}65$ и

$$\sigma_1 = \frac{v(\psi_1) - \bar{a}_1}{\delta_1} = 0{,}127.$$

Необходимая точность изготовления будет $10^m \simeq 10 \sqrt{\frac{L}{\lambda}} \frac{1}{\sigma_1} \simeq 500$, $10^{-m} = \varepsilon/L \simeq 0{,}002$, $m \simeq \lg 500 = 2{,}7$, $\varepsilon \simeq 0{,}002L = 0{,}08\lambda$.

В заключение отметим, что результаты настоящей работы могут быть использованы при изучении корреляционных свойств дифракционного изображения фокусирующих систем.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Расчет интеграла I

При определении корреляционной функции $K_f(\psi; \psi_1)$ необходимо рассчитать интеграл вида

$$I = \int_{-1}^{+1}\int e^{-\frac{(x-x_1)^2}{c^2} + j\psi x - j\psi_1 x_1} dx\, dx_1.$$

Перейдем от переменных x, x_1 к новым переменным u, v:

$$u = \frac{x_1 - x}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{x_1 + x}{\sqrt{2}}.$$

Переход к переменным u и v означает поворот системы координат, как показано на рис. 5. Учитывая, что двойной интеграл берется по заштрихованному на рис.

* В рассматриваемом примере $\bar{a}_1/\sigma_1 \simeq 3{,}3$ и замена функции P_1 функцией допустима.

квадрату, имеем

$$I=\int_{-1}^{+1}\int e^{-\frac{(x-x_1)^2}{c^2}+j\psi x-j\psi_1 x_1}\,dx\,dx_1=$$

$$=\int_0^{\sqrt{2}} e^{-\frac{2u^2}{c^2}-j\frac{u}{\sqrt{2}}(\psi+\psi_1)}\,du\int_{-(\sqrt{2}-u)}^{\sqrt{2}-u} e^{j\frac{v}{\sqrt{2}}(\psi-\psi_1)}\,dv+$$

$$+\int_{-\sqrt{2}}^{0} e^{-\frac{2u^2}{c^2}-j\frac{u}{\sqrt{2}}(\psi+\psi_1)}\,du\int_{-(\sqrt{2}+u)}^{\sqrt{2}+u} e^{j\frac{v}{\sqrt{2}}(\psi-\psi_1)}\,dv=$$

$$=\frac{4\sqrt{2}}{\psi-\psi_1}\int_0^{\sqrt{2}}\cos\frac{u(\psi+\psi_1)}{\sqrt{2}}\sin\frac{(\sqrt{2}-u)(\psi-\psi_1)}{\sqrt{2}}\,e^{-\frac{2u^2}{c^2}}\,du.$$

Переходя к новой переменной $\frac{\sqrt{2}\,u}{c}=y$, получим

$$I=\frac{2c\sin(\psi-\psi_1)}{\psi-\psi_1}\left[\int_0^{2/c} e^{-y^2}\cos c\psi_1 y\,dy+\int_0^{2/c} e^{-y^2}\cos c\psi y\,dy\right]-$$

$$-\frac{2c\cos(\psi-\psi_1)}{\psi-\psi_1}\left[\int_0^{2/c} e^{-y^2}\sin c\psi y\,dy-\int_0^{2/c} e^{-y^2}\sin c\psi_1 y\,dy\right].$$

Входящие в полученное выражение интегралы легко можно вычислить. Опуская соответствующие выкладки, напишем конечный результат:

$$\int_0^{2/c} e^{-y^2}\cos c\psi y\,dy=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-\frac{\psi^2c^2}{4}}\operatorname{Re}\Phi\left(\frac{2}{c}-j\frac{\psi c}{2}\right),$$

$$\int_0^{2/c} e^{-y^2}\sin c\psi y\,dy=F\left(\frac{\psi c}{2}\right)+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,e^{-\frac{\psi^2c^2}{4}}\operatorname{Im}\Phi\left(\frac{2}{c}-j\frac{\psi c}{2}\right),$$

где

$$\Phi(z)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^z e^{-t^2}\,dt;\qquad F(z)=e^{-z^2}\int_0^z e^{t^2}\,dt.$$

Используя эти результаты, получим окончательное выражение для интеграла I:

$$I=\int_{-1}^{+1}\int e^{-\frac{(x-x_1)^2}{c^2}+j\psi x-j\psi_1 x_1}\,dx\,dx_1=c\sqrt{\pi}\,\frac{\sin(\psi-\psi_1)}{\psi-\psi_1}\left\{e^{-\frac{\psi_1^2c^2}{4}}\operatorname{Re}\Phi\left(\frac{2}{c}-j\frac{\psi_1 c}{2}\right)+\right.$$

$$\left.+e^{-\frac{\psi^2c^2}{4}}\operatorname{Re}\Phi\left(\frac{2}{c}-j\frac{\psi c}{2}\right)\right\}-2c\,\frac{\cos(\psi-\psi_1)}{\psi-\psi_1}\left\{\left[F\left(\frac{\psi c}{2}\right)-F\left(\frac{\psi_1 c}{2}\right)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\left[e^{-\frac{\psi^2c^2}{4}}\operatorname{Im}\Phi\left(\frac{2}{c}-j\frac{\psi c}{2}\right)-e^{-\frac{\psi_1^2c^2}{4}}\operatorname{Im}\Phi\left(\frac{2}{c}-j\frac{\psi_1 c}{2}\right)\right]\right\}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Расчет дисперсии составляющих множителя системы $f(\psi)$

Ограничимся вычислением дисперсии случайной величины

$$a = \operatorname{Re} f(\psi) = \bar{a} - \int_{-1}^{+1} A(x)\,\varphi(x)\sin\psi x\,dx,$$

$$\sigma_a^2 = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} A(x)\,A(x_1)\,\overline{\varphi(x)\,\varphi(x_1)}\sin\psi x\sin\psi x_1\,dx\,dx_1 =$$

$$= \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} A(x)\,A(x_1)\,r\sigma(x)\,\sigma(x_1)\sin\psi x\sin\psi x_1\,dx\,dx_1 =$$

$$= \int_{-1}^{+1} A(x)\,\sigma(x)\sin\psi x\,dx \int_{-1}^{+1} A(x_1)\,\sigma(x_1)\sin\psi x_1 e^{-\frac{(x-x_1)^2}{c^2}}\,dx_1.$$

Если интервал корреляции ρ много меньше линейных размеров системы L, т. е. $c \ll 1$, то существенная при вычислении внутреннего интеграла область расположена вблизи $x = x_1$ и поэтому пределы во внутреннем интеграле можно растянуть до $\pm\infty$.

Полагая далее, что $A(x)\,\sigma(x)$ — медленно меняющаяся функция, имеем

$$\sigma_a^2 = \int_{-1}^{+1} A(x)\,\sigma(x)\sin\psi x\,dx \int_{-1}^{+1} A(x_1)\,\sigma(x_1)\sin\psi x_1 e^{-\frac{(x-x_1)^2}{c^2}}\,dx_1 \simeq$$

$$\simeq \int_{-1}^{+1} A^2(x)\,\sigma^2(x)\sin\psi x\,dx \int_{-\infty}^{+\infty} \sin\psi x_1 e^{-\frac{(x-x_1)^2}{c^2}}\,dx_1.$$

Используя формулу [8]

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-q^2x^2} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} [p(x+\lambda)]\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{q}\,e^{-\frac{p^2}{4q^2}} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} p\lambda,$$

получим окончательно

$$\sigma_a^2 \simeq \sqrt{\pi}\,ce^{-\frac{\psi^2c^2}{4}} \int_{-1}^{+1} A^2(x)\,\sigma^2(x)\sin^2\psi x\,dx.$$

Аналогичным образом рассчитываются величина σ_b^2 и корреляционный момент величин a и b.

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. Р у з е, Влияние ошибок раскрыва на диаграммы направленности антенн, Вопросы радиолокационной техники, 1956, 2, 98.
2. Е. Н. Г и л ь б е р т, С.П. М о р г а н, Расчет оптимальной антенной решетки при наличии случайных изменений, Вопросы радиолокационной техники, 1955, 6, 55.
3. J. R o b i e u x, Influence de la précision de fabrication d'une antenne sur ses performances, Ann. radioélectr., 1956, **11**, 43, 26.
4. В. И. Т а л а н о в, Н. М. Ш е р о н о в а, О влиянии случайных ошибок в распределении источников на диаграммы направленности антенн бегущей волны, Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1959, **2**, 3, 424.
5. В. С. П у г а ч е в, Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, ГИТТЛ, 1957.
6. В. Н. Ф а д е е в а, Н. М. Т е р е н т ь е в, Таблицы значений интеграла вероятностей от комплексного аргумента, ГИТТЛ, 1954.
7. Б. Р. Л е в и н, Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, Изд. Советское радио, 1957.
8. И. М. Р ы ж и к, Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений, ГТИ, 1948.

Поступила в редакцию
10 V 1961

ДИФРАКЦИЯ ВОЛН НА ЩЕЛИ И ЛЕНТЕ, ОРИЕНТИРОВАННЫХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРНО К ИМПЕДАНСНОЙ ПЛОСКОСТИ

М. Д. Хаскинд

Изложен метод построения точных решений двумерных задач о дифракции E-волн на щели и идеально проводящей ленте, ориентированных перпендикулярно к импедансной плоскости. Общий метод основан на анализе свойств специальной функциональной комбинации, введенной в [1, 2]. Особое внимание уделено предельным решениям, представленным в эффективной форме. Полученные результаты сопоставлены с приближенными решениями, обсуждавшимися в [3].

1. ИСХОДНЫЕ СООТНОШЕНИЯ

Электромагнитное поле над импедансной плоскостью $z = 0$ исследуется при помощи магнитного вектора Герца $\Pi_m = \varphi(y, z)\,\mathbf{x}^0$, где $\mathbf{x}^0$ — единичный вектор оси x, и фактор времени $\exp i\omega t$ опускается. Напряженности электрического и магнитного полей представляются следующими соотношениями в практической рационализированной системе единиц:

$$\mathbf{E} = -ik\rho_0\,(\operatorname{grad}\varphi \times \mathbf{x}^0), \quad E_x = 0, \quad E_y = -ik\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial z}, \quad E_z = ik\rho_0\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \tag{1}$$

$$H_x = k^2\varphi, \quad H_y = H_z = 0 \quad \left(\rho_0 = \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}\right)^{1/2} = 120\,\pi\ \text{ом}\right),$$

где $k = \omega\,(\varepsilon_0\mu_0)^{1/2}$ — волновое число в свободном пространстве.

На импедансной плоскости имеем условие

$$E_y = i\rho_0 Z H_x \quad \text{при } z = 0\ (Z > 0),$$

которое для скалярной функции φ принимает вид

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} + p\varphi = 0 \quad \text{при } z = 0 \qquad (p = kZ). \tag{2}$$

Последующий анализ основан на рассмотрении свойств функциональной комбинации

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} - p\varphi = \frac{\partial f}{\partial z}, \tag{3}$$

где функция $f(y, z)$, так же как и $\varphi(y, z)$, удовлетворяет волновому уравнению и в соответствии с (2) условию

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad \text{при } z = 0, \tag{4}$$

позволяющему продолжить функцию f в нижнее полупространство четным образом, вследствие чего функция f является регулярной и однозначной во всем пространстве вне цилиндрической поверхности, ограниченной поперечным контуром $L + L^*$, где L — поперечный контур цилиндрической поверхности, внутри которой расположены источники, L^* — зеркальное отображение контура L в нижней полуплоскости

Если функция $f(y, z)$ определена, то, как показано в [1, 2], обратный переход к функции $\varphi(y, z)$ с учетом асимптотики осуществляется единственным образом. Ниже используется следующая формула перехода:

$$\varphi = e^{-pz} \int_{-\infty}^{z} e^{p\zeta} \frac{\partial f}{\partial \zeta} d\zeta + i \frac{p}{h} A(\pm h, p)\, e^{-pz \mp ihy}, \tag{5}$$

$$A(\pm h, p) = \frac{1}{2} \int_{L+L^*} e^{pz \pm ihy} \left[\frac{\partial f}{\partial n} - f(\pm ih \cos(n, y) + p \cos(n, z)) \right] dl$$

$$(h^2 = k^2 + p^2), \tag{6}$$

где прямолинейный путь интегрирования $(-\infty, z)$ в (5) не пересекает контур $L + L^*$. Верхний знак берется для точек, расположенных правее этого контура, а нижний — для точек, находящихся левее его. При этом второе слагаемое в (5) определяет возбуждаемое поле поверхностных волн, а функция $A(\pm h, p)$ с точностью до множителя ip/h представляет собой комплексную амплитуду этих волн.

Средняя мощность электромагнитной энергии, переносимая поверхностными волнами через единичный поперечный отрезок при $y \to \pm\infty$, определяется в простой форме [3]

$$P_{\pm} = \rho_0 \frac{pk^3}{4h} |A(\pm h, p)|^2. \tag{7}$$

Полная же комплексная мощность находится по общей формуле

$$P_k = \int_L E_l H_x^* dl = i\rho_0 k^3 \int_L \varphi^* \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl, \tag{8}$$

где на идеально проводящих частях контура L касательная составляющая $E_l = i\rho_0 k \partial\varphi/\partial n$ напряженности электрического поля обращается в нуль; на открытых частях эта составляющая является заданной функцией или же подлежит определению при «сшивании» внутреннего и внешнего полей.

2. ДИФРАКЦИЯ ВОЛН НА ЩЕЛИ

Рассмотрим прямолинейную щель между идеально проводящей и импедансной плоскостями, ориентированными взаимно перпендикулярно (рис. 1), и предположим, что со стороны $y<0$ задано произвольное падающее поле, которое с учетом отражения от импедансной плоскости характеризуется функцией $\varphi_0(y, z)$. В частности, для падающих плоских волн имеем

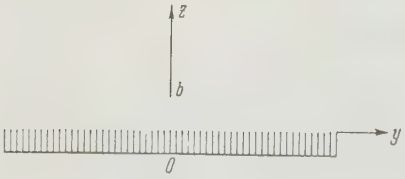


Рис. 1

$$\varphi_0 = e^{-ik(y\cos\beta - z\sin\beta)} + Re^{-ik(y\cos\beta + z\sin\beta)},$$

$$R = \frac{ik\sin\beta + p}{ik\sin\beta - p}, \tag{9}$$

где β — угол возвышения, а R — коэффициент отражения от импедансной плоскости. Если $\beta = i\alpha_0$, т. е. когда $k\operatorname{ch}\alpha_0 = h$, $k\operatorname{sh}\alpha_0 = p$, и $R = 0$, то падающая волна превращается в поверхностную волну с функцией $\varphi_0(y, z)$ вида

$$\varphi_0 = e^{-ihy - pz}. \tag{10}$$

Пусть функция $\varphi_+ = \varphi(y, z)$ $(y > 0)$ определяет прошедшие волны; тогда легко видеть, что электромагнитное поле при $y < 0$ можно охарактеризовать при помощи суммы $\varphi_- = \varphi_0(y, z) + \varphi_0(-y, z) - \varphi(-y, z)$, где скалярная функция $\varphi_0(-y, z)$ соответствует отраженным волнам от идеально проводящей плоскости $y = 0$. Непрерывность всего решения и условие $E_z = 0$ на идеально проводящей плоскости при-

водят к соотношениям

$$\varphi(0, z) = \varphi_0(0, z) \quad \text{при } 0 < z < b; \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0,\ b < z < \infty. \tag{11}$$

Эти условия позволяют продолжить функцию φ из области $y > 0$ в область $y < 0$ четным образом, и, следовательно, значения $\partial\varphi/\partial y$ с обеих сторон отрезка $(0, b)$ оси z противоположны по знаку.

Рассмотрим теперь функцию (3), для которой условия (11) примут вид

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + p\varphi_0 \quad \text{при } y = 0, \quad 0 < z < b;$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial z} = 0 \quad \text{при } y = 0, \quad b < z < \infty.$$

Учитывая, что функция f обращается на бесконечности в нуль, можно положить

$$f = C_1 + \int \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + p\varphi_0\right) dz = U(z) \quad \text{при } y = 0,\ 0 < z < b;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad b < z < \infty, \tag{12}$$

где C_1 — постоянная интегрирования, подлежащая определению при окончательном удовлетворении условий (11). При этом на основании (4) условия (12) продолжаются четным образом на нижнюю полуплоскость, в силу второго из условий (12), $f(-y, z) = f(y, z)$, а значения $\partial f/\partial y$ на обеих сторонах отрезка $(-b, b)$ оси z противоположны по знаку. Поэтому, стягивая в (6) контур $L + L^*$ к этому отрезку, будем иметь

$$A(\pm h, p) = \int_{-b}^{b} \frac{\partial f^+}{\partial y} e^{pz} dz \qquad \left(\frac{\partial f^+}{\partial y} = \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{y=+0}\right). \tag{13}$$

Положим в (5) $y = +0$, $0 < z < b$; тогда, учитывая (11) и свойства функции f, получим соотношение

$$i\frac{p}{h} A(h, p) - \int_b^\infty e^{-pz} \frac{\partial f}{\partial z} dz = \varphi_0(0, b)\, e^{-pb} + 2p \int_0^b e^{-pz} \varphi_0(0, z)\, dz, \tag{14}$$

определяющее постоянную C_1. Вычислим теперь плотности поверхностных токов $i_z^{\pm} = \mp H_x$ соответственно на теневой и освещенной сторонах идеально проводящей плоскости ($y = \pm 0$, $z \geqslant b$), которые согласно (5) и (11) определяются в виде

$$i_z^+ = -k^2 e^{-pz} \left(\varphi_0(0, b)\, e^{pb} + \int_b^z e^{pz} \frac{\partial f}{\partial z}\, dz\right),$$

$$i_z^- = 2k^2 \varphi_0(0, z) + i_z^+, \tag{15}$$

следовательно, для полной плотности тока имеем выражение

$$i_z = i_z^+ + i_z^- = 2k^2 \left[\varphi_0(0, z) - e^{-pz} \left(\varphi_0(0, b)\, e^{pb} + \int_b^z e^{pz} \frac{\partial f}{\partial z}\, dz\right)\right]. \tag{16}$$

Покажем, что комплексную мощность (см. (8))

$$P_k = i\rho_0 k^3 \int_0^b \frac{\partial \varphi^+}{\partial y} \varphi_0^*(0, z)\, dz \tag{17}$$

можно в простой форме выразить через функцию f. В самом деле, из (5) имеем ($y=+0$, $0<z<b$)

$$\frac{\partial\varphi^+}{\partial y}=\frac{\partial f^+}{\partial y}+pe^{-pz}\Big(A\ (\pm h,\ p)-\int\limits_{-b}^{z}e^{pz}\ \frac{\partial f^+}{\partial y}\,dz\Big)=$$

$$=\frac{\partial f^+}{\partial y}+pe^{-pz}\int\limits_{z}^{b}e^{pz}\ \frac{\partial f^+}{\partial y}\,dz, \tag{18}$$

и, в случае функции φ_0, определяемой из (9), находим

$$P_k=i\rho_0k^3\ \frac{ik\sin\beta^*}{ik\sin\beta^*+p}\int\limits_{-b}^{b}\frac{\partial f^+}{\partial y}\,e^{ikz\sin\beta^*}\,dz \tag{19}$$

В частности, при $\beta=i\alpha_0$ ($k\operatorname{sh}\alpha_0=p$), т. е. когда падающая волна является поверхностной волной, комплексная мощность P_k выражается через $A\ (\pm h,\ p)$ весьма просто:

$$P_k=\frac{i}{2}\,\rho_0\,k^3A\ (\pm h,\ p)=\frac{\rho_0k^3h}{2p}D_0,\quad D_0=\frac{ip}{h}\,A\ (h,\ p),\quad R_0=1-D_0, \tag{20}$$

где D_0 и R_0 — коэффициенты прохождения и отражения поверхностных волн.

Пользуясь (18), легко также установить выражение для суммарного напряжения V, приложенного к кромкам щели:

$$V=\int\limits_0^b E_z\ (0,\ z)\ dz=ik\rho_0\int\limits_0^b\frac{\partial f^+}{\partial y}\,e^{pz}\,dz. \tag{21}$$

Заметим еще, что для падающих поверхностных волн (10) равенство (18) можно представить в форме

$$\frac{\partial\varphi^+}{\partial y}=-ihe^{-pz}+ihR_0e^{-pz}+\frac{\partial f^+}{\partial y}-pe^{-pz}\int\limits_{-b}^{z}e^{pz}\ \frac{\partial f^+}{\partial y}\,dz\quad(y=+0,\ 0<z<b) \tag{22}$$

Первое слагаемое в (22) соответствует приближению Кирхгофа, а остальные учитывают эффект отражения и рассеяния волн.

Для определения функции f введем эллиптическую систему координат

$$z=b\operatorname{ch}\xi\cos\eta,\quad y=b\operatorname{sh}\xi\sin\eta. \tag{23}$$

Легко видеть, что координатным линиям $\xi=\text{const}$ соответствует совокупность софокусных эллипсов в плоскости zy, а координатным линиям $\eta=\text{const}$ соответствует совокупность софокусных гипербол, ортогональных к эллипсам. Дважды пробегаемый отрезок $(-b,\ b)$ оси z представляет собой вырожденный эллипс $\xi=0$ и $|\eta|<\pi$, а части координатной оси $|z|>b$ соответствуют вырожденные гиперболы $\eta=0$ и $\eta=\pm\pi$ ($\xi>0$).

В эллиптической системе координат частными решениями волнового уравнения является совокупность произведений четных и нечетных функций Матье $\varphi_n^{(1)}=Ce_n(\xi)\,ce_n(\eta)$ $(n=0,\ 1,\ \ldots)$ и $\varphi_n^{(2)}=Se_n(\xi)\,se_n(\eta)$ $(n=1,\ 2,\ \ldots)$, причем функции $ce_n(\eta)$ и $se_n(\eta)$ — ортогональные системы периодических функций, имеющих нормировку:

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi}[ce_n(\eta)]^2\,d\eta=\pi,\quad\int\limits_{-\pi}^{\pi}[se_n(\eta)]^2\,d\eta=\pi.$$

Функции Матье $ce_n(\eta)$ и $se_n(\eta)$ представляются разложениями в ряды Фурье в следующем виде [4]:

$$ce_n(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} \cos m\eta, \qquad se_n(\eta) = \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} \sin m\eta, \tag{24}$$

где индексы n и m имеют одинаковую четность, а коэффициенты A_{nm} и B_{nm} являются целыми функциями параметра $\theta = (kb)^2/4$. Функции же Матье — Ханкеля $Ce_n(\xi)$ и $Se_n(\xi)$ выражаются также при помощи рядов через функции Бесселя и Ханкеля [5, 6].

Функцию f, удовлетворяющую условиям (12), можно найти при помощи разложения в ряд по функциям $\varphi_n^{(1)}$, и в результате получаем

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{Ce_n(\xi)}{Ce_n(0)} ce_n(\eta), \qquad a_n = \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} d_m^{(1)},$$

$$d_m^{(1)} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} U(b\cos\eta) \cos m\eta \, d\eta. \tag{25}$$

Для функции φ_0, определяемой из (9), коэффициенты $d_m^{(1)}$ легко рассчитываются. В этом случае

$$U(z) = C_1 + \left(1 + \frac{p}{ik\sin\beta}\right)(e^{ikz\sin\beta} + e^{-ikz\sin\beta}). \tag{26}$$

Поэтому, воспользовавшись интегралом Бесселя

$$(\pm i)^m J_m(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\pm ix\cos\eta} \cos m\eta \, d\eta, \tag{27}$$

находим ($\delta_0 = 1$, $\delta_m = 0$ при $m \neq 0$)

$$d_m^{(1)} = 2\delta_m C_1 + 2i^m (1 + (-1)^m)\left(1 + \frac{p}{ik\sin\beta}\right) J_m(kb\sin\beta). \tag{28}$$

Точно так же нетрудно найти комплексную амплитуду $A(\pm h, p)$ поверхностных волн. Из (25) определяем

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{b\sin\eta} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{Ce_n'(0)}{Ce_n(0)} ce_n(\eta) \qquad \left(Ce_n'(0) = \left(\frac{dCe_n(\xi)}{d\xi}\right)_{\xi=0}\right). \tag{29}$$

Подставив это выражение в (13), получим

$$A(\pm h, p) = \pi \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{Ce_n'(0)}{Ce_n(0)} D_n^{(1)}(\nu), \qquad D_n^{(1)}(\nu) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{nm} I_m(\nu) \qquad (\nu = pb). \tag{30}$$

Здесь $I_m(\nu)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента:

$$I_m(\nu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\nu\cos\eta} \cos m\eta \, d\eta. \tag{31}$$

В аналогичной форме выражаются комплексная мощность P_k и напряжение V. Действительно, из формул (19), (21) и (29) можно установить ($\alpha_0^{(1)} = 0$, $\alpha_m^{(1)} = 1/m$)

$$P_k = \pi i \rho_0 k^3 \frac{ik\sin\beta^*}{ik\sin\beta^* + p} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{Ce_n'(0)}{Ce_n(0)} D_n^{(1)}(ikb\sin\beta^*), \tag{32}$$

$$V = ikp \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{Ce_n'(0)}{Ce_n(0)} B_n, \qquad B_n = \sum_{m=0}^{\infty} A_{mn} \left(\nu^m S_m(\nu) + \alpha_m^{(1)} \sin \frac{m\pi}{2} \right), \tag{33}$$

где $S_m(\nu)$ представляют собой следующие функции:

$$S_m(\nu) = \frac{1}{\nu^m} \left(\int_0^{\pi/2} e^{\nu \cos \eta} \cos m\eta \, d\eta - \alpha_m^{(1)} \sin \frac{m\pi}{2} \right), \tag{34}$$

для которых интегрированием по частям получаем рекуррентное соотношение

$$S_{m+1}(\nu) = \frac{1}{\nu^2} S_{m-1}(\nu) - \frac{2m}{\nu^2} S_m(\nu) - \frac{1}{\nu^{m+1}} (\alpha_{m-1}^{(1)} + \alpha_{m+1}^{(1)}) \cos \frac{m\pi}{2}$$
$$(m = 1, 2, \ldots). \tag{35}$$

Это соотношение определяет все функции $S_m(\nu)$ через $S_0(\nu)$ и $S_1(\nu)$. Последние же изучены в [7] и они выражаются через функции Бесселя и функции Струве $L_0(\nu)$ и $L_1(\nu)$ нулевого и первого порядков от мнимого аргумента [8] следующим образом:

$$S_0(\nu) = \frac{\pi}{2} \left(I_0(\nu) + L_0(\nu) \right), \qquad S_1(\nu) = \frac{\pi}{2\nu} \left(I_1(\nu) + L_1(\nu) \right), \tag{36}$$

причем для функций Струве найдены тождества [7]

$$L_0(\nu) = -\frac{2}{\pi} \left[I_0^{-1}(\nu) K_0(\nu) - K_0^{-1}(\nu) I_0(\nu) \right], \qquad I_0^{-1}(\nu) = \int_0^{\nu} I_0(\nu) \, d\nu,$$

$$L_1(\nu) = \frac{2}{\pi} \left[I_0^{-1}(\nu) K_1(\nu) + K_0^{-1}(\nu) I_1(\nu) - 1 \right], \qquad K_0^{-1}(\nu) = \int_0^{\nu} K_0(\nu) \, d\nu,$$

где $K_n(\nu)$ — модифицированные функции Ханкеля от мнимого аргумента (функции Макдональда).

Для определения постоянной C_1, входящей в решение (25), необходимо удовлетворить условие (14). Интегральное слагаемое в этом условии наиболее удобно рассчитать при помощи равенства

$$f = \frac{i}{2} \int_{-b}^{b} \frac{\partial f^+}{\partial y} H_0^{(2)} \left[k \left(y^2 + (z - s)^{1/2} \right] ds, \right. \tag{37}$$

в соответствии с которым имеем

$$\int_b^{\infty} e^{-pz} \frac{\partial f}{\partial z} dz = \frac{i}{2} \int_{-b}^{b} \frac{\partial f^+}{\partial y} \left(p Q(s) - H_0^{(2)}(k(b - s)) \right) ds, \tag{38}$$

$$Q(s) = e^{-ps} \int_{b-s}^{\infty} e^{-pt} H_0^{(2)}(kt) \, dt. \tag{39}$$

Дальнейшая методика расчета отдельных коэффициентов в соотношении (14) примерно такая же, как и в задаче о вибрациях тонкого крыла в дозвуковом потоке [9], и поэтому детали вычислений мы опускаем.

Как известно, полученное решение (25) в виде разложения в ряд по функциям Матье может быть использовано при расчетах для значений $kb \leqslant 1$ и $kb \sim 1$ и практически непригодно для значений $kb \geqslant 1$. С другой стороны, для значений $kb \ll 1$ предельное решение (25) приобретает более простую форму. При $kb \ll 1$ функции $\varphi_n^{(1)} \simeq \cos n\eta \exp(-n\xi)$ и $\varphi_n^{(2)} \simeq \sin n\eta \exp(-n\xi)$, причем $\varphi_0^{(1)} \simeq \xi$, и все вычисления значитель-

о упрощаются. Рассмотрим, в частности, дифракцию поверхностных олн на щели, т. е. когда $\beta = i\alpha_0$ ($p = k \operatorname{sh} \alpha_0$). В этом случае $\varphi_0(0, z) = \exp(-pz)$ и $U(z) = \text{const}$. Поэтому условие (14) становится более ростым:

$$i \frac{p}{h} A - \int_b^\infty e^{-pz} \frac{\partial f}{\partial z} dz = 1, \tag{40}$$

де функция f при $kb \ll 1$ определяется в эффективном виде

$$f = a_0 \xi + \text{const}, \tag{41}$$

котором несущественную постоянную можно отбросить. В точках оси z меем

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{a_0}{b \sin \eta}, \quad \xi = 0, \quad 0 < \eta < \pi; \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{a_0}{b \operatorname{sh} \xi}, \quad \eta = 0, \quad \xi > 0. \tag{42}$$

На основании (13) получим

$$A(\pm h, p) = \pi a_0 I_0(\nu) \quad (\nu = pb). \tag{43}$$

Учитывая еще равенство

$$\int_0^\infty e^{-\nu \operatorname{ch} \xi} d\xi = K_0(\nu) \tag{44}$$

воспользовавшись (40), (42) и (43), получим

$$a_0 = \frac{1}{\pi i p h^{-1} I_0(\nu) - K_0(\nu)}, \qquad A(\pm h, p) = \frac{-\pi i I_0(\nu)}{\pi p h^{-1} I_0(\nu) + i K_0(\nu)}. \tag{45}$$

Расчленим выражение (20) на активную и реактивную мощности, олагая $P_k = 2P_a + i2P_r$; тогда легко установить

$$P_a = P_+ = \frac{1}{4} \rho_0 k^3 p h^{-1} \frac{(\pi I_0(\nu))^2}{\Delta_1^2}, \qquad P_r = -\frac{1}{4} \rho_0 k^3 \frac{\pi I_0(\nu) K_0(\nu)}{\Delta_1^2} \tag{46}$$

$$(\Delta_1^2 = (\pi p h^{-1} I_0(\nu))^2 + K_0^2(\nu)),$$

е P_+ определяется из (7) и (45), и, таким образом, полная активная мощсть целиком расходуется на образование поверхностных волн. Этот зультат не является неожиданным, поскольку при $kb \ll 1$ имеет место лучение только поверхностных волн и отсутствует излучение цилиндческих волн. Далее из (21), (34) и (42) находим

$$V = -\rho_0 k \frac{S_0(\nu)}{\pi p h^{-1} I_0(\nu) + i K_0(\nu)}. \tag{47}$$

едовательно, комплексная проводимость излучения определяется форлой

$$g_k = \frac{P_k}{|V|^2} = \frac{k}{2\rho_0 S_0^2(\nu)} [p h^{-1} (\pi I_0(\nu))^2 - \pi i I_0(\nu) K_0(\nu)]. \tag{48}$$

Остановимся более подробно на числовых значениях коэффициента хождения поверхностных волн:

$$D_0 = i p h^{-1} A(h, p) = |D_0| e^{-i\theta_0}, \qquad |D_0| = \frac{\pi p h^{-1} I_0(\nu)}{\Delta_1},$$

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{K_0(\nu)}{\pi p h^{-1} I_0(\nu)}, \qquad p h^{-1} = (1 - \beta_0^2)^{1/2}, \qquad \beta_0 = \frac{k}{h}. \tag{49}$$

Здесь β_0 — коэффициент замедления. Следует, однако, иметь в виду, при принятом условии отношение $pb/hb \simeq 1$, поэтому рассматривае-

мое приближение практически не учитывает коэффициент замедления и для оценки можно им воспользоваться лишь для малых β_0. На рис. 2 и 3 представлены зависимости от ν величин $|D_0|$ и θ_0 при $\beta_0 = 0$ и $\beta_0 = 0{,}6$. Из расчетов вытекает ($\beta_0 = 0$), что при $\nu = 0{,}02$ получаем $|D_0| = 0{,}61$ и $\theta_0 = 52°$, а при $\nu = 0{,}4$ получаем $|D_0| = 0{,}95$ и $\theta_0 = 19°$. Для обсуждения этих данных введем в рассмотрение эффективную высоту $\Delta = 1/p$ зоны действия поверхностных волн; тогда оказывается, что при $\Delta \leqslant 2{,}5\,b$ имеет место полное прохождение падающих поверхностных волн и отсут-

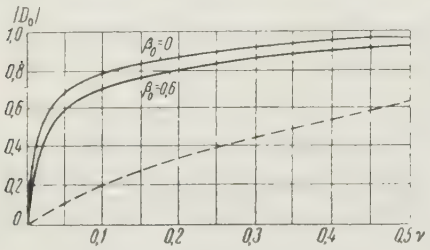


Рис. 2

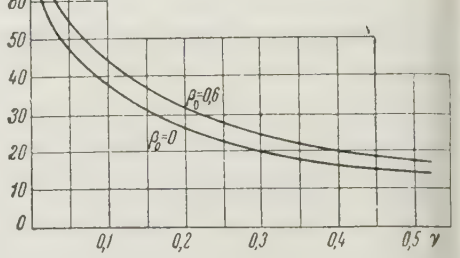


Рис. 3

ствует их отражение. Это означает, что поверхностные волны способны просачиваться через узкую щель ($kb \ll 1$), испытывая слабое искажение своей структуры при условии $\Delta \leqslant 2{,}5\,b$. Можно поэтому думать, что в соотношении (22) преобладающее значение имеет первое слагаемое (приближение Кирхгофа). С другой стороны, коэффициент прохождения можно вычислить при помощи точной формулы [3]

$$D_0 = 2i\frac{p}{h}\int_0^b \frac{\partial \varphi^+}{\partial y} e^{-pz}\,dz. \qquad (50)$$

Если теперь воспользоваться приближением Кирхгофа, полагая $\partial\varphi^+/\partial y \simeq \simeq -ih \exp(-pz)$, то из (50) получим зависимость

$$D_0 \simeq 1 - e^{-2\nu}, \qquad (51)$$

изображенную на рис. 2 пунктиром, которая приводит к значительно заниженным значениям, что вполне понятно, поскольку данный случай наименее благоприятен для рассматриваемого приближения [3].

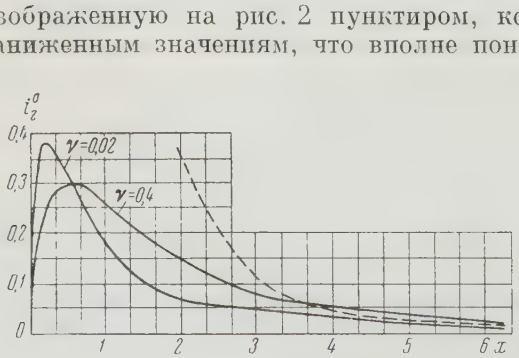


Рис. 4

Рассмотрим еще выражение для относительной величины поверхностного тока $i_z^0 = i_z/k^2$, определяемое согласно (16) и (24) в виде

$$i_z^0 = -2a_0 e^{-\nu z_0}\int_1^{z_0} \frac{e^{\nu t}\,dt}{(t^2-1)^{1/2}} \quad (z_0 = z/b). \qquad (52)$$

На рис. 4 представлен график зависимости $|i_z^0|$ от $x = p(z - b)$ при $\beta_0 = 0$. На этом же графике приведена предельная кривая $i_z^0 = 2\exp(-px)$ ($pb = 0$), отвечающая полному отражению падающих поверхностных волн

3. ДИФРАКЦИЯ ВОЛН НА ЛЕНТЕ

Пусть на идеально проводящую ленту, расположенную перпендикулярно к импедансной плоскости (рис. 5), падает произвольно заданное поле, характеризуемое функцией $\varphi_0(y, z)$. В данном случае представляется удобным задать полное поле во всей верхней полуплоскости при помощи функции $\varphi + \varphi_0$, где скалярная функция φ определяет поле рассеянных волн. В такой постановке граничное условие на идеально проводящей ленте имеет вид

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \quad \text{при } y = 0, \quad 0 < z < b, \tag{53}$$

это условие для функции (3) дает следующее:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = C_2 - \int \left(\frac{\partial}{\partial z} + p\right) \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} dz = U(z) \text{ при } y = 0,\ 0 < z < b, \tag{54}$$

где постоянную C_2 следует определить при окончательном удовлетворении условия (53); кроме того, на основании (1) значения $\partial f/\partial y$ продолжаются в нижнюю полуплоскость четным образом. Для функции φ_0, определяемой из (9), находим

$$U(z) = C_2 + \operatorname{ctg}\beta\,(ik\sin\beta + p)\,(e^{ikz\sin\beta} + e^{-ikz\sin\beta}). \tag{55}$$

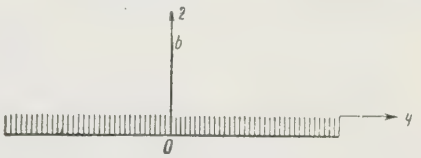


Рис. 5

Из соображений симметрии очевидно, что $f(-y, z) = -f(y, z)$. Поэтому значения функции f с обеих сторон отрезка $(-b, b)$ оси z противоположны по знаку, а на остальных частях оси z функция f обращается в нуль. Учитывая эти свойства и стягивая в (6) контур $L + L^*$ к отрезку $(-b, b)$, получим

$$A(\pm h, p) = \mp ih \int_{-b}^{b} f^+ e^{pz} dz = \pm i \frac{h}{p} \int_{-b}^{b} \frac{\partial f^+}{\partial z} e^{pz} dz \quad (f^+ = f(+0, z)). \tag{56}$$

Дифференцируя (5) по y и полагая $y = 0$, найдем

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} - pe^{-pz} \int_{-\infty}^{z} e^{pz} \frac{\partial f}{\partial y} dz + pA(h, p) e^{pz}. \tag{57}$$

Удовлетворяя теперь условие (53), приходим к соотношению

$$p \int_{b}^{\infty} e^{-pz} \frac{\partial f}{\partial y} dz - pA(h, p) = e^{-pb} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} + U\right)_{z=b} + 2p \int_{0}^{b} e^{-pz} \frac{\partial \varphi_0}{\partial y} dz, \tag{58}$$

определяющему постоянную C_2. Для падающих поверхностных волн (10) $U = C_2$ и равенство (57) несколько упрощается:

$$p \int_{b}^{\infty} e^{-pz} \frac{\partial f}{\partial y} dz - pA(h, p) = C_2 e^{-pb} - ih, \tag{59}$$

коэффициенты прохождения и отражения поверхностных волн связаны с $A(\pm h, p)$ следующим образом:

$$D_0 = 1 \pm i \frac{p}{h} A(h, p), \quad R_0 = i \frac{p}{h} A(-h, p) = 1 - D_0. \tag{60}$$

В этом случае остается в силе формула (20) для полной комплексной мощности P_k, вычисляемая аналогичным путем, а для расчета средней мощности P_+, переносимой поверхностными волнами при $y \to \infty$, необходимо учесть падающие волны; тогда найдем

$$P_+ = \frac{\rho_0 k^3 h}{4p} |D_0|^2. \tag{61}$$

На основании (5) и (56) легко также определить поверхностную плотность и полный ток, текущие по ленте:

$$i_z = -2k^2 e^{-pz} \int_b^z e^{pz} \frac{df^+}{\partial z} dz,$$

$$I_z = \int_0^b i_z dz = -\frac{2k^2}{p} \int_0^b \frac{\partial f^+}{\partial z} (1 - e^{pz})\, dz. \tag{62}$$

Отметим еще, что для функции (10) можно в простой форме получить выражение для напряжения V между верхней кромкой ленты и бесконечно удаленной точкой:

$$V = ik\rho_0 \int_b^\infty \frac{\partial (\varphi + \varphi_0)}{\partial y} dz = \rho_0 \frac{ik}{p} C_2.$$

Построение решения данной задачи осуществляется так же как и раньше — при помощи разложения функции f в ряд по нечетным функциям Матье:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \frac{Se_n(\xi)}{Se_n'(0)} se_n(\eta) \qquad \left(Se_n'(0) = \left(\frac{dSe_n(\xi)}{d\xi}\right)_{\xi=0}\right). \tag{63}$$

Это соотношение удовлетворяет условию $f(0, z) = 0$ при $|z| > b$. Удовлетворяя еще условие (54), получаем выражения для коэффициентов b_n

$$b_n = \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} d_m^{(2)}, \quad d_m^{(2)} = \frac{2b}{\pi} \int_0^\pi \sin\eta \sin m\eta U(b\cos\eta)\, d\eta, \tag{64}$$

причем для функции (55) $d_m^{(2)}$ определяются через функции Бесселя ($\delta_1 = 1$, $\delta_m = 0$ при $m \neq 1$):

$$d_m^{(2)} = b\left[\delta_m C_2 + 2m \operatorname{ctg}\beta\,(1 - (-1)^m)\left(1 + \frac{p}{ik\sin\beta}\right) i^m J_m(kb\sin\beta)\right]. \tag{65}$$

Нетрудно установить общие выражения для $A(\pm h, p)$ и I_z. Для этого учтем (56), (62), (63), (31) и (34) и в результате найдем

$$A(\pm h, p) = \mp \pi i \frac{h}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Se_n(0)}{Se_n'(0)} b_n D_n^{(2)}, \quad D_n^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} m B_{nm} I_m(\nu), \tag{66}$$

$$I_z = -\frac{2k^2}{p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{Se_n(0)}{Se_n'(0)} b_n Y_n, \quad Y_n = \sum_{m=1}^{\infty} B_{nm} m \nu^m S_m(\nu) \quad (\nu = pb). \tag{67}$$

Для окончательного решения необходимо определить постоянную C_2, используя соотношение (58). При этом первое интегральное слагаемое в левой части удобнее всего преобразовать при помощи равенства

$$f = \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial y} \int_{-b}^{b} f^+ H_0^{(2)} [(k(z-s)^2 + y^2)^{1/2}]\, ds; \tag{68}$$

тогда будем иметь

$$\int_b^\infty e^{-pz}\frac{\partial f}{\partial y}\,dz = \frac{i}{2}\int_{-b}^{b} f^+\,[e^{-pb}\,(pH_0^{(2)}(k\,(b-s)) - \\ - kH_1^{(2)}(k\,(b-s)) - h^2Q\,(s)]\,ds, \tag{69}$$

де функция $Q\,(s)$ определяется из (39).

Изучим предельное решение при $kb \ll 1$ в простейшем случае падающих поверхностных волн (10). Здесь функция f определяется в простом виде:

$$f = -bC_2e^{-\xi}\sin\eta. \tag{70}$$

Из (56) и (59) сразу получаем

$$A\,(\pm h,\,p) = \pm\pi i\frac{h}{p}C_2I_1\,(\nu), \quad C_2 = \frac{1}{b}\,\frac{i}{ph^{-1}K_1\,(\nu)+\pi iI_1\,(\nu)}; \tag{71}$$

поэтому, согласно (60), для коэффициентов отражения и прохождения имеем

$$R_0 = \frac{\pi I_1\,(\nu)}{\pi I_1\,(\nu) - iph^{-1}K_1\,(\nu)},$$

$$D_0 = \frac{ph^{-1}K_1\,(\nu)}{ph^{-1}K_1\,(\nu)+\pi iI_1\,(\nu)} = \\ = |D_0|\,e^{-i\theta_0}\left(\operatorname{tg}\theta_0 = \frac{\pi I_1\,(\nu)}{ph^{-1}K_1(\nu)}\right), \tag{72}$$

причем $P_a = P_+$, так как $\operatorname{Re}D_0 = |D_0|^2$ обусловлено это теми же причинами, что и в ранее рассмотренном случае.

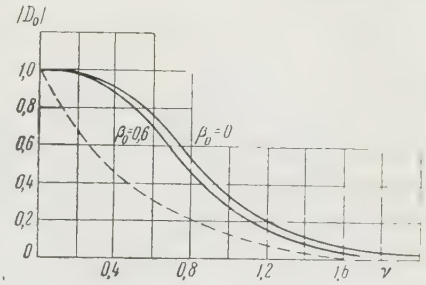


Рис. 6

На рис. 6 и 7 представлены зависимости от ν величин $|D_0|$ и θ_0. Как видно, при $\nu \simeq 1{,}5$ коэффициент прохождения поверхностных волн обращается в нуль, и, следовательно, лишь тогда, когда эффективная высота $h = 1/p$ не более $^2/_3$ ширины ленты, имеет место полное отражение поверхностных волн и отсутствует их прохождение.

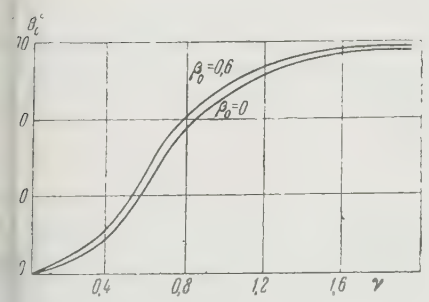


Рис. 7

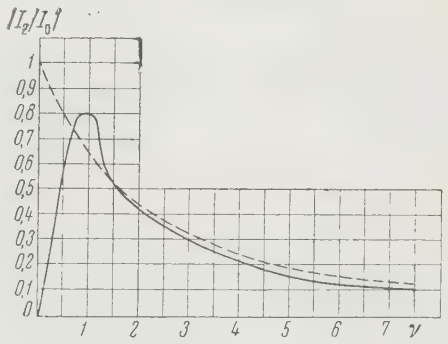


Рис. 8

Сопоставим эти данные с приближением Кирхгофа, которое аналогично (50) определяется из точной формулы

$$D_0 = 2i\frac{p}{h}\int_b^\infty \frac{\partial\varphi^+}{\partial y}e^{-pz}\,dz \simeq 2i\frac{p}{h}\int_b^\infty \frac{\partial\varphi_0}{\partial y}e^{-pz}dz = e^{-2\nu}. \tag{73}$$

зависимость (73) изображена на рис. 6 пунктирной линией.

Подставим теперь (70) в (62), и тогда для полной величины тока будем иметь

$$I_z = I_0 b C_2 S_1(\nu) = |I_z| e^{i\left(\frac{\pi}{2}-\theta_0\right)} (I_0 = 2k^2 b). \quad (74)$$

На рис. 8 приведена зависимость $|I_z|/I_0$ ($\beta_0 = 0$) и здесь же представлена предельная кривая $I_z/I_0 = \nu^{-1}(1 - \exp(-\nu))$, соответствующая полному отражению падающих волн (пунктирная линия). Из графика следует, что макс $|I_z| = 0{,}695\ I_0$ достигается при $\nu = 0{,}78$.

В заключение отметим, что точное решение, изложенное здесь для ленты, в математическом отношении обобщает одно из решений [10], а предельные задачи о дифракции поверхностных волн на щели и ленте при $kb \ll 1$ соответствуют гидродинамическим задачам [11, 7, 12], изучавшимся иным методом.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Д. Хаскинд, Распространение звуковых и электромагнитных волн в полупространстве, Акуст. ж., 1959, 5, 4, 464.
2. М. Д. Хаскинд, Возбуждение поверхностных электромагнитных волн на плоских диэлектрических покрытиях, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 2, 188.
3. М. Д. Хаскинд, Возбуждение волн на импедансной плоскости, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 8, 1259.
4. М. Д. О. Стретт, Функции Ляме, Матье и родственные им в физике и технике, перев. с англ., ОНТИ, 1935.
5. В. Д. Купрадзе, Основные задачи математической теории дифракции (установившиеся процессы), ОНТИ, 1935.
6. Н. В. Мак-Лахлан, Теория и приложения функций Матье, перев. с англ., ИЛ, 1953.
7. М. Д. Хаскинд, Излучение и дифракция поверхностных волн вертикально плавающей пластиной, Прикладная математика и механика, 1959, 23, 3, 546.
8. Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, перев. с англ., ИЛ, 1949.
9. G. Blanch, H. E. Fettis, Subsonic oscillatory aerodynamic coefficients computed by the method of Reissner and Haskind, J, Aeronaut. Sci., 1953, 20, 12, 851 (см. Реферативный журнал «Механика», 1955, № 3, реферат № 2237).
10. М. Д. Хаскинд, Дифракция волн вокруг движущегося цилиндрического судна, Прикладная математика и механика, 1953, 17, 4, 431.
11. М. Д. Хаскинд, Давление волн на заграждение, Инженерный сборник Института механики АН СССР, 1948, 4, 2, 147.
12. И. А. Марнянский, Дифракция волн вокруг подводной вертикальной пластины, Прикладная математика и механика, 1954, 17, 2, 233.

Поступила в редакцию
21 XI 1960

ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ВОЛНОВОД ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО СЕЧЕНИЯ

Л. А. Любимов, Г. И. Веселов, Н. А. Бей

Изложены начала теории диэлектрического волновода эллиптического сечения. Анализ ограничен выводом дисперсионных уравнений и критических условий. Приведены результаты расчетов дисперсионных кривых для основных волн («четной» и «нечетной») и критических размеров по ближайшим высшим типам в форме, сравнимой со случаем круглого сечения.

ВВЕДЕНИЕ

Эффекты диэлектрического волновода имеют место во многих волноводных устройствах, содержащих диэлектрические пластины. Примерами таких устройств могут служить фазовращатели, поляризаторы, узлы с ферритами. Понимание и количественная оценка явлений, происходящих в этих устройствах, затруднительны из-за отсутствия теории диэлектрического волновода эллиптического сечения, поскольку в большинстве случаев применяются диэлектрики вытянутого (прямоугольного) сечения. В известных авторам работах по теории диэлектрического волновода [1, 2, 3] и др. изучен ряд сложных явлений, но всюду рассматривается диэлектрик круглого сечения. Случай эллиптического сечения потребовал преодоления ряда громоздких вычислений с использованием функций Матье, а также введения разумных упрощений. Проделанные вычисления и упрощения позволили получить ряд важных соотношений, в том числе дисперсионные уравнения в относительно простой форме, доступной для дальнейшей обработки.

1. СОСТАВЛЯЮЩИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

Анализ волновых процессов, происходящих внутри и около диэлектрического стержня эллиптического сечения (рис. 1), проводится с использованием системы координат «эллиптический цилиндр» (ξ, η, z). Координаты ξ и η связаны с прямоугольными координатами x и y соотношениями

$$x = c \operatorname{ch} \xi \cos \eta,$$

$$y = c \operatorname{sh} \xi \sin \eta.$$

Параметр ξ определяет степень эллиптичности цилиндра, а величины η и $c \operatorname{sh} \xi$ дают характерные размеры сечения (полуоси). Закон изменения составляющих поля вдоль оси z предполагается для прямой волны в форме $e^{-\gamma z}$, где γ — постоянная распространения. Волновой множитель $e^{i(\omega t - \gamma z)}$ в дальнейшем всюду опускается.

За исходные величины возьмем продольные составляющие поля E_z и H_z. Волновые уравнения

$$\Delta E_z + \omega^2 \varepsilon \mu E_z = 0,$$

$$\Delta H_z + \omega^2 \varepsilon \mu H_z = 0$$

обретают в случае системы координат эллиптический цилиндр следую-

щий вид:

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial \eta^2} = -E_z \frac{\vartheta^2}{2} [\operatorname{ch} 2\xi - \cos 2\eta], \quad (1)$$

где

$\vartheta^2 = K_c^2 c^2$; $K_c^2 = \gamma^2 + \omega^2 \varepsilon\mu$; c — параметр преобразования координат.

Решение (1), отыскиваемое в форме $E_z = F(\xi)\, H(\eta)$, приводит к уравнениям

$$\frac{\partial^2 H}{\partial \eta^2} + \left(\lambda - \frac{\vartheta^2}{2} \cos 2\eta\right) H = 0,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \left(-\lambda + \frac{\vartheta^2}{2} \operatorname{ch} 2\xi\right) F = 0.$$

Постоянная λ должна иметь такую величину, которая при заданном ϑ^2 дает периодические решения уравнения Матье для функции $H(\eta)$. Номера параметра λ для каждого ϑ^2 дают номера волновых гармоник (по параметру η).

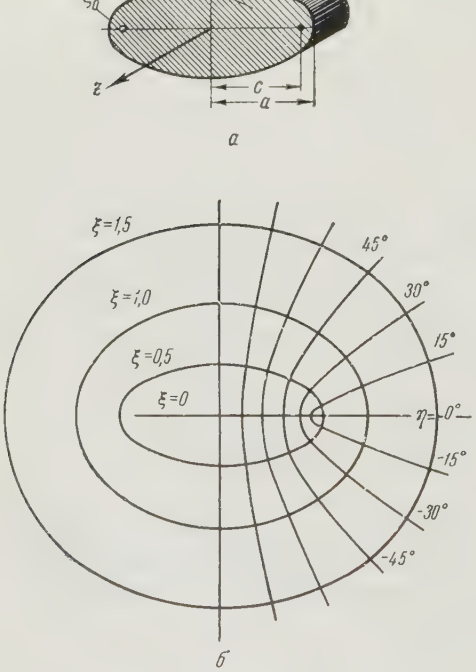


Рис. 1. Форма диэлектрического волновода (*а*) и принятая система координат (*б*)

Трудности дальнейшего анализа связаны отчасти с использованием нетабулированных радиальных функций Матье, но главным образом со сложностью формулировки граничных условий. Дело в том, что параметры $K_{c_1}^2$ и $K_{c_2}^2$ (для внутренней и внешней областей диэлектрического волновода) различны по величине и по знаку ($K_{c_1}^2 > 0$, $K_{c_2}^2 < 0$). Соответственно отличаются параметры волновых уравнений ϑ_1^2 и ϑ_2^2. Из-за этого угловые функции $C_n(\vartheta, \eta)$ и $S_n(\vartheta, \eta)$ не одинаковы для двух областей на общей границе $\xi_0 = \text{const}$ (рис. 1). Иными словами, для тождественного уравнивания тангенциальных составляющих на общей границе $\xi_0 = \text{const}$ приходится использовать ряды угловых функций, что делает задачу в целом весьма громоздкой.

Для внешней области получаем следующие выражения для составляющих:

$$E_{z,e} = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu Rc_\nu(\vartheta_2, \xi)\, C_\nu(\vartheta_2, \eta) + \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu Rs_\nu(\vartheta_2, \xi)\, S_\nu(\vartheta_2, \eta), \quad (1$$

$$H_{z,e} = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu Rc_\nu(\vartheta_2, \xi)\, C_\nu(\vartheta_2, \eta) + \sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu Rs_\nu(\vartheta_2, \xi)\, S_\nu(\vartheta_2, \eta), \quad (1$$

$$E_{\xi,e} = -\frac{1}{K_{c_2}^2 c\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\eta}}\Big[\gamma\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu R'c_\nu(\vartheta_2,\xi)\,C_\nu(\vartheta_2,\eta) +$$

$$+\gamma\sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu R's_\nu(\vartheta_2,\xi)\,S_\nu(\vartheta_2,\eta) +$$

$$-j\omega\mu_2\sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu Rc_\nu(\vartheta_2,\xi)\,C'_\nu(\vartheta_2,\eta) + j\omega\mu_2\sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu Rs_\nu(\vartheta_2,\xi)\,S'_\nu(\vartheta_2,\eta)\Big], \quad (4)$$

$$E_{\eta,e} = -\frac{1}{K_{c_2}^2 c\sqrt{\operatorname{ch}\xi - \cos^2\eta}}\Big[\gamma\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu Rc_\nu(\vartheta_2,\xi)\,C'_\nu(\vartheta_2,\eta) +$$

$$+\gamma\sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu Rs_\nu(\vartheta_2,\xi)S'_\nu(\vartheta_2,\eta) -$$

$$-j\omega\mu_2\sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu R'c_\nu(\vartheta_2,\xi)\,C_\nu(\vartheta_2,\eta) - j\omega\mu_2\sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu R's_\nu(\vartheta_2,\xi)\,S_\nu(\vartheta_2,\eta)\Big], \quad (5)$$

$$H_{\xi,e} = -\frac{1}{K_{c_2}^2 c\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\eta}}\Big[-j\omega\varepsilon_2\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu Rc_\nu(\vartheta_2,\xi)\,C'_\nu(\vartheta_2,\eta) -$$

$$-j\omega\varepsilon_2\sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu Rs_\nu(\vartheta_2,\xi)\,S'_\nu(\vartheta_2,\eta) +$$

$$+\gamma\sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu R'c_\nu(\vartheta_2,\xi)\,C_\nu(\vartheta_2,\eta) + \gamma\sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu R's_\nu(\vartheta_2,\xi)\,S_\nu(\vartheta_2,\eta)\Big], \quad (6)$$

$$H_{\eta,e} = -\frac{1}{K_{c_2}^2 c\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi - \cos^2\eta}}\Big[j\omega\varepsilon_2\sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu R'c_\nu(\vartheta_2,\xi)\,C_\nu(\vartheta_2,\eta) +$$

$$+j\omega\varepsilon_2\sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu R's_\nu(\vartheta_2,\xi)\,S_\nu(\vartheta_2,\eta) + \gamma\sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu Rc_\nu(\vartheta_2,\xi)\,C'_\nu(\vartheta_2,\eta) +$$

$$+\gamma\sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu Rs_\nu(\vartheta_2,\xi)\,S'_\nu(\vartheta_2,\eta)\Big], \quad (7)$$

Где $Rc_\nu, Rs_\nu, C_\nu, S_\nu$ — радиальные и угловые функции Матье (четные и нечетные) ν-го порядка.

Во внутренней области составляющие также выражаются рядами:

$$E_{z,i} = \sum_{k=1}^{\infty} A'_k Rc_k(\vartheta_1,\xi)\,C_k(\vartheta_1,\eta) + \sum_{k=1}^{\infty} C'_k Rs_k(\vartheta_1,\xi)\,S_k(\vartheta_1,\eta), \quad (8)$$

$$H_{z,i} = \sum_{k=1}^{\infty} B'_k Rc_k(\vartheta_1,\xi)\,C_k(\vartheta_1,\eta) + \sum_{k=1}^{\infty} D'_k Rs_k(\vartheta_1,\xi)\,S_k(\vartheta_1,\eta). \quad (9)$$

Поперечные составляющие записываются формулами, сходными с (4) — (7).

2. ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Граничные условия можно записать следующим образом (при $\xi = \xi_0$)

$$E_{z,i} = E_{z,e},\ H_{z,i} = H_{z,e},\ E_{\eta,e} = E_{\eta,i},\ H_{\eta,e} = H_{\eta,i}. \tag{10}$$

Рассматривая (10) вместе с (2) — (7), отметим следующее. Первые два соотношения (10) фактически связывают между собой коэффициенты A'_k и A_ν, C'_k и C_ν, B'_k и B_ν, D'_k и D_ν. Третье и четвертое равенства (10) содержат четные и нечетные функции параметра η, разделив которые, получим отдельные связи A_ν, D_ν, A'_k и D'_k; C_ν, B_ν, C'_k и B'_k.

Таким образом, волны, описываемые гармониками с коэффициентами A, A' и D, D', не зависят от волн, имеющих коэффициенты гармоник C, C' и B, B'. Ряды гармоник следует также разделить из условий симметрии по признаку четности и нечетности номеров ν и k.

Рассматриваемые ниже типы волн имеют и электрические и магнитные продольные составляющие, причем одна из них четная, другая — нечетная функция параметра η. В связи с этим разделение типов на четные и нечетные, принятое для волн металлического волновода эллиптического сечения [4], будет в нашем случае условным. В целях сохранения преемственности целесообразно все же присвоить название четных волн волнам с составляющими

$$E_{z,e} = \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu Rs_\nu(\vartheta_2, \xi) S_\nu(\vartheta_2, \eta),$$

$$H_{z,e} = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu Rc_\nu(\vartheta_2, \xi) C_\nu(\vartheta_2, \eta)$$

и нечетных волн для волн с составляющими

$$E_{z,e} = \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu Rc_\nu(\vartheta_2, \xi) C_\nu(\vartheta_2, \eta),$$

$$H_{z,e} = \sum_{\nu=1}^{\infty} D_\nu Rs_\nu(\vartheta_2, \xi) S_\nu(\vartheta_2, \eta).$$

На примере нечетных волн выпишем граничные условия (10) в развернутом виде. Первые условия примут вид

$$\sum_\nu A_\nu Rc_\nu(\vartheta_2, \xi_0) C_\nu(\vartheta_2, \eta) = \sum_\nu A_\nu \sum_k A_{\nu,k} Rc_k(\vartheta_1, \xi_0) C_k(\vartheta_1, \eta), \tag{11}$$

$$\sum_\mu D_\mu Rs_\mu(\vartheta_2, \xi_0) S_\mu(\vartheta_2, \eta) = \sum_\mu D_\mu \sum_k D_{\mu,k} Rs_k(\vartheta_1, \xi_0) S_k(\vartheta_1, \eta), \tag{12}$$

где $A_{\nu,k}$ и $D_{\mu,k}$ — коэффициенты разложения функций $C_\nu(\vartheta_2, \eta)$ и $S_\mu(\vartheta_2, \eta)$ по функциям параметра ϑ_1, умноженные соответственно на $Rc_\nu(\vartheta_2, \xi_0) / Rc_k(\vartheta_1, \xi_0)$ и $Rs_\mu(\vartheta_2, \xi_0) / Rs_k(\vartheta_1, \xi_0)$.

Третьему и четвертому условиям можно придать форму

$$\gamma\left(\frac{1}{K_{c_1}^2} - \frac{1}{K_{c_2}^2}\right) \sum_\nu A_\nu Rc_\nu(\vartheta_1, \xi_0) C'_\nu(\vartheta_2, \eta) = \frac{j\omega\mu_1}{K_{c_1}^2} \sum_\mu D_\mu \sum_k D_{\mu,k} R'_{s_k}(\vartheta_1, \xi_0) \times$$

$$\times S_k(\vartheta_1, \eta) - \frac{j\omega\mu_2}{K_{c_2}^2} \sum_\mu D_\mu \frac{R's_\mu(\vartheta_2, \xi_0)}{Rs_\mu(\vartheta_2, \xi_0)} \sum_k D_{\mu,k} Rs_k(\vartheta_1, \xi_0) S_k(\vartheta_1, \eta), \tag{13}$$

$$\gamma\left(\frac{1}{K_{c_1}^2} - \frac{1}{K_{c_2}^2}\right) \sum_\mu D_\mu Rs_\mu(\vartheta_2, \xi_0) S'_\mu(\vartheta_2, \eta) = -\frac{j\omega\varepsilon_1}{K_{c_1}^2} \sum_\nu A_\nu \sum_k A_{\nu,k} R'c_k(\vartheta_1, \xi_0) \times$$

$$\times C_k(\vartheta_1, \eta) + \frac{j\omega\varepsilon_2}{K_{c_2}^2} \sum_\nu A_\nu \frac{R'c_\nu(\vartheta_2, \xi_0)}{Rc_\nu(\vartheta_2, \xi_0)} \sum_k A_{\nu,k} Rc_k(\vartheta_1, \xi_0) C_k(\vartheta_1, \eta). \tag{14}$$

выражениях (13) и (14) присутствуют соответственно только нечетные четные функции η. Оба равенства можно превратить в функциональные ождества, если разложить функции $C'_\nu(\vartheta_2, \eta)$ и $S'_\mu(\vartheta_2, \eta)$ в ряды по $k(\vartheta_1, \eta)$ и $C_k(\vartheta_1, \eta)$, а именно:

$$C'_\nu(\vartheta_2, \eta) = \sum_k A'_{\nu,k} S_k(\vartheta_1, \eta); \quad S'_\mu(\vartheta_2, \eta) = \sum_k D'_{\mu,k} C_k(\vartheta_1, \eta). \tag{15}$$

3. ДИСПЕРСИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОСНОВНЫХ ВОЛН

С учетом (15) условия (13) и (14) распадаются каждое на несколько равенств коэффициентов при соответствующих видах функций: $S_1(\vartheta_1, \eta)$, $_3(\vartheta_1, \eta)$, $S_5(\vartheta_1, \eta)$ и т. д. В каждое равенство войдут ν коэффициентов A_ν μ коэффициентов D_μ (всего μ + ν). Для совместимости системы равенств еобходимо, чтобы μ + ν равнялось удвоенному числу членов разложения по параметру k, т. е. общему числу равенств. Для практического расета (имея в виду конкретные условия расчетов $\vartheta_1 \leqslant 4$ и $|\vartheta_2| \leqslant 4$ и конкретно для основного типа волны) можно взять по две функции в каждой умме, поскольку остальные гармоники весьма малы. В этом случае получаем следующие соотношения:

$$A_1\gamma\left(\frac{1}{K^2_{c_1}} - \frac{1}{K^2_{c_2}}\right) Rc_1(\vartheta_2, \xi_0) A'_{11} + A_3\gamma\left(\frac{1}{K^2_{c_1}} - \frac{1}{K^2_{c_2}}\right)$$

$$Rc_3(\vartheta_2, \xi_0) A'_{31} - D_1\left[\frac{-j\omega\mu_1}{K^2_{c_1}} Rs_1(\vartheta_2, \xi_0) \frac{R's_1(\vartheta_1, \xi_0)}{Rs_1(\vartheta_1, \xi_0)} + \frac{j\omega\mu_2}{K^2_{c_2}} R's_1(\vartheta_2, \xi_0)\right] \times$$

$$\times D_{11} + D_3\left[\frac{-j\omega\mu_1}{K^2_{c_1}} Rs_3(\vartheta_2, \xi_0) \frac{R's_1(\vartheta_1, \xi_0)}{Rs_1(\vartheta_1, \xi_0)} + \frac{j\omega\mu_2}{K^2_{c_2}} R's_3(\vartheta_2, \xi_0)\right] D_{31} = 0, \tag{16}$$

$$A_1\gamma\left(\frac{1}{K^2_{c_1}} - \frac{1}{K^2_{c_2}}\right) Rc_1(\vartheta_2, \xi_0) A'_{13} + A_3\gamma\left(\frac{1}{K^2_{c_1}} - \frac{1}{K^2_{c_2}}\right) Rc_3(\vartheta_2, \xi_0) A'_{33} +$$

$$+ D_1\left[\frac{-j\omega\mu_1}{K^2_{c_1}} Rs_1(\vartheta_2, \xi_0) \frac{R's_3(\vartheta_1, \xi_0)}{Rs_3(\vartheta_1, \xi_0)} + \frac{j\omega\mu_2}{K^2_{c_2}} R's_1(\vartheta_2, \xi_0)\right] D_{13} -$$

$$- D_3\left[\frac{-j\omega\mu_1}{K^2_{c_1}} Rs_3(\vartheta_2, \xi_0) \frac{R's_3(\vartheta_1, \xi_0)}{Rs_3(\vartheta_1, \xi_0)} + \frac{j\omega\mu_2}{K^2_{c_2}} R's_3(\vartheta_2, \xi_0)\right] D_{33} = 0, \tag{17}$$

$$A_1\left[\frac{j\omega\varepsilon_1}{K^2_{c_1}} Rc_1(\vartheta_2, \xi_0) \frac{R'c_1(\vartheta_1, \xi_0)}{Rc_1(\vartheta_1, \xi_0)} - \frac{j\omega\varepsilon_2}{K^2_{c_2}} R'c_1(\vartheta_2, \xi_0)\right] A_{11} +$$

$$+ A_3\left[\frac{j\omega\varepsilon_1}{K^2_{c_1}} Rc_3(\vartheta_2, \xi_0) \frac{R'c_1(\vartheta_1, \xi_0)}{Rc_1(\vartheta_1, \xi_0)} - \frac{j\omega\varepsilon_2}{K^2_{c_2}} R'c_3(\vartheta_2, \xi_0)\right] A_{31} +$$

$$+ D_1\gamma\left(\frac{1}{K^2_{c_1}} - \frac{1}{K^2_{c_2}}\right) Rs_1(\vartheta_2, \xi_0) D'_{11} + D_3\gamma\left(\frac{1}{K^2_{c_1}} - \frac{1}{K^2_{c_2}}\right) Rs_3(\vartheta_2, \xi_0) D'_{31} = 0, \tag{18}$$

$$A_1\left[\frac{j\omega\varepsilon_1}{K^2_{c_1}} Rc_1(\vartheta_2, \xi_0) \frac{R'c_3(\vartheta_1, \xi_0)}{Rc_3(\vartheta_1, \xi_0)} - \frac{j\omega\varepsilon_2}{K^2_{c_2}} R'c_1(\vartheta_2, \xi_0)\right] A_{13} +$$

$$+ A_3\left[\frac{j\omega\varepsilon_1}{K^2_{c_1}} Rc_3(\vartheta_2, \xi_0) \frac{R'c_3(\vartheta_1, \xi_0)}{Rc_3(\vartheta_1, \xi_0)} - \frac{j\omega\varepsilon_2}{K^2_{c_2}} R'c_3(\vartheta_2, \xi_0)\right] A_{33} +$$

$$D_1\gamma\left(\frac{1}{K^2_{c_1}} - \frac{1}{K^2_{c_2}}\right) Rs_1(\vartheta_2, \xi_0) D'_{13} + D_3\gamma\left(\frac{1}{K^2_{c_1}} - \frac{1}{K^2_{c_2}}\right) Rs_3(\vartheta_2, \xi_0) D'_{33} = 0. \tag{19}$$

выражениях (16) – (19) коэффициенты $A_{\nu,k}$ и $D_{\mu,k}$ являются коэффициентами разложения функций $C_\nu(\vartheta_2, \eta)$ и $S_\mu(\vartheta_2, \eta)$ по функциям параметра ϑ_1 без внесения (как это было раньше) дополнительных множителей.

Множители при A_1; A_3; D_1; D_3 в (16) — (19) обозначим соответственно $a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}$; $a_{31}, a_{32}, a_{33}, a_{34}$; $d_{11}, d_{12}, d_{13}, d_{14}$, $d_{31}, d_{32}, d_{33}, d_{34}$. Тогда дисперсионное уравнение, соответствующее равенствам (16) — (19), записывается в форме

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{31} & d_{11} & d_{31} \\ a_{12} & a_{32} & d_{12} & d_{32} \\ a_{13} & a_{33} & d_{13} & d_{33} \\ a_{14} & a_{34} & d_{14} & d_{34} \end{vmatrix} = 0. \tag{20}$$

В форме (20) дисперсионное уравнение все же громоздко для вычислений, и желательны дальнейшие упрощения. С этой целью замечаем, что в основном типе волны наиболее сильно выражена первая гармоника угловой функции, т. е. $A_1 \gg A_3$ и $D_1 \gg D_3$. Если учесть дополнительно, что $A'_{11} \gg A'_{31}$, $D'_{11} \gg D'_{31}$, $A_{11} \gg A_{31}$ и $D_{11} \gg D_{31}$, то видно, что соотношения (16) и (18) можно упростить, отбросив малые второго порядка (составляющие по величине около 1% от основных членов). В результате получим приближенные соотношения, которые для краткости будем называть «основным» приближением:

$$A_1\gamma\left(\frac{1}{K_{c_1}^2}-\frac{1}{K_{c_2}^2}\right)Rc_1(\vartheta_2,\xi_0)\,A'_{11}+D_1\left[\frac{-j\omega\mu_1}{K_{c_1}^2}Rc_1(\vartheta_2,\xi_0)\frac{R'_{s_1}(\vartheta_1,\xi_0)}{Rs_1(\vartheta_1,\xi_0)}+\right.$$
$$\left.+\frac{j\omega\mu_2}{K_{c_2}^2}R'_{s_1}(\vartheta_2,\xi_0)\right]D_{11}=0, \tag{21}$$

$$A_1\left[\frac{j\omega\varepsilon_1}{K_{c_1}^2}Rc_1(\vartheta_2,\xi_0)\frac{R'_{c_1}(\vartheta_1,\xi_0)}{Rs_1(\vartheta_1,\xi_0)}-\frac{j\omega\varepsilon_2}{K_{c_2}^2}R'_{c_1}(\vartheta_2,\xi_0)\right]A_{11}+$$
$$+D_1\gamma\left(\frac{1}{K_{c_1}^2}-\frac{1}{K_{c_2}^2}\right)Rs_1(\vartheta_2,\xi_0)\,D'_{11}=0. \tag{22}$$

Система уравнений (21) и (22) дает дисперсионное уравнение в форме

$$\gamma^2\left(\frac{1}{K_{c_1}^2}-\frac{1}{K_{c_2}^2}\right)^2\frac{A'_{11}D'_{11}}{A_{11}D_{11}}=-\omega^2\mu_r\varepsilon_r\left[-\frac{\mu_r}{K_{c_1}^2}\frac{R'_{s_1}(\vartheta_1,\xi_0)}{Rs_1(\vartheta_1,\xi_0)}+\frac{1}{K_{c_2}^2}\frac{R'_{s_1}(\vartheta_2,\xi_0)}{Rs_1(\vartheta_2,\xi_0)}\right]\times$$
$$\times\left[\frac{\varepsilon_r}{K_{c_1}^2}\frac{R'_{c_1}(\vartheta_1,\xi_0)}{Rc_1(\vartheta_1,\xi_0)}-\frac{1}{K_{c_2}^2}\frac{R'_{c_1}(\vartheta_2,\xi_0)}{Rc_1(\vartheta_2,\xi_0)}\right]. \tag{23}$$

Здесь $\mu_r=\mu_1/\mu_2$; $\varepsilon_r=\varepsilon_1/\varepsilon_2$. В оставшихся уравнениях (17) и (19) произведения A_1A_{13}, A_3A_{33}, $D_1D'_{13}$, $D_3D'_{33}$ и т. п. суть одного порядка малости, так что эти уравнения позволяют вычислить A_3 и D_3 через A_1 и D_1 и провести расчет структуры поля и другие исследования.

Умножая выражение (23) на $(c^2)^2$, придаем ему более компактную форму. Получаем для нечетной основной волны $(HE)_{11}^{н}$

$$-\frac{\gamma^2}{\omega^2\mu_r\varepsilon_r}\left(\frac{1}{\vartheta_1^2}-\frac{1}{\vartheta_2^2}\right)^2\frac{A'_{11}D'_{11}}{A_{11}D_{11}}=$$
$$=\left[\frac{\varepsilon_r}{\vartheta_1^2}\frac{R'_{c_1}(\vartheta_1,\xi_0)}{Rc_1(\vartheta_1,\xi_0)}-\frac{1}{\vartheta_2^2}\frac{R'_{c_1}(\vartheta_2,\xi_0)}{Rc_1(\vartheta_2,\xi_0)}\right]\left[-\frac{\mu_r}{\vartheta_1^2}\frac{R'_{s_1}(\vartheta_1,\xi_0)}{Rs_1(\vartheta_1,\xi_0)}+\frac{1}{\vartheta_2^2}\frac{R'_{s_1}(\vartheta_2,\xi_0)}{Rs_1(\vartheta_2,\xi_0)}\right] \tag{24}$$

исперсионное уравнение для четной основной волны $(HE)_{11}^{ч}$ примет в слу-е основного приближения следующий вид:

$$-\frac{\gamma^2}{\omega^2\mu_r\varepsilon_r}\left(\frac{1}{\vartheta_1^2}-\frac{1}{\vartheta_2^2}\right)^2\frac{C'_{11}B'_{11}}{C_{11}B_{11}}= \tag{25}$$

$$\left[\frac{\varepsilon_r}{\vartheta_1^2}\frac{R's_1(\vartheta_1,\xi_0)}{Rs_1(\vartheta_1,\xi_0)}-\frac{1}{\vartheta_2^2}\frac{R's_1(\vartheta_2,\xi_0)}{Rs_1(\vartheta_2,\xi_0)}\right]\left[-\frac{\mu_r}{\vartheta_1^2}\frac{R'c_1(\vartheta_1,\xi_0)}{Rc_1(\vartheta_1,\xi_0)}+\frac{1}{\vartheta_2^2}\frac{R'c_1(\vartheta_2,\xi_0)}{Rc_1(\vartheta_2,\xi_0)}\right].$$

4. ДИСПЕРСИОННЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ОСНОВНЫХ ВОЛН

Коэффициент замедления волны в волноводе обозначим $m=\lambda/\lambda_c$, есь λ_c — длина волны в рассматриваемой системе (в волноводе) — длина волны во внешней среде при той же частоте. Используя также означения

$$\vartheta_1^2/\vartheta_2^2=\frac{\varepsilon_r\mu_r-m^2}{1-m^2}=\chi,$$

$$\frac{A'_{11}D'_{11}}{A_{11}D_{11}}=\frac{C'_{11}B'_{11}}{C_{11}B_{11}}=D_1,$$

лучим дисперсионные уравнения в следующей форме, удобной для рас-тов.

Для волны $(HE)_{11}^{н}$

$$m^2=-\frac{1}{D_1}\left[\varepsilon_r\frac{1}{1-\chi}\frac{R'c_1(\vartheta_1,\xi_0)}{Rc_1(\vartheta_1,\xi_0)}-\frac{\chi}{1-\chi}\frac{K'c_1(\vartheta_2,\xi_0)}{Kc_1(\vartheta_2,\xi_0)}\right]\times$$

$$\times\left[\mu_r\frac{1}{1-\chi}\frac{R's_1(\vartheta_1,\xi_0)}{Rs_1(\vartheta_1,\xi_0)}-\frac{\chi}{1-\chi}\frac{K's_1(\vartheta_2,\xi_0)}{Ks_1(\vartheta_2,\xi_0)}\right]. \tag{26}$$

Для волны $(HE)_{11}^{ч}$

$$m^2=-\frac{1}{D_1}\left[\varepsilon_r\frac{1}{1-\chi}\frac{R's_1(\vartheta_1,\xi_0)}{Rs_1(\vartheta_1,\xi_0)}-\frac{\chi}{1-\chi}\frac{K's_1(\vartheta_2,\xi_0)}{Ks_1(\vartheta_2,\xi_0)}\right]\times$$

$$\times\left[\mu_r\frac{1}{1-\chi}\frac{R'c_1(\vartheta_1,\xi_0)}{Rc_1(\vartheta_1,\xi_0)}-\frac{\chi}{1-\chi}\frac{K'c_1(\vartheta_2,\xi_0)}{Kc_1(\vartheta_2,\xi_0)}\right], \tag{27}$$

(ϑ_1,ξ_0) и $Rs_1(\vartheta_1,\xi_0)$ — как и раньше четная и нечетная радиальные нкции Матье — Бесселя первого порядка; $Kc_1(\vartheta_2,\xi_0)$ и $Ks_1(\vartheta_2,\xi_0)$ — ная и нечетная радиальные функции типа Матье — Макдональда. Под здесь понимается модуль величины, как это обычно имеется в виду в значениях функций Макдональда.

Для упомянутых радиальных функций не опубликованы таблицы или фики, поэтому для настоящего анализа они и их производные по ли рассчитаны специально. При этом использовались разложения, при-енные в работах [5, 6, 7].

Вычисления коэффициента D_1 позволили получить для него следующее тношение:

$$D_1=-\frac{[B_1^{(1)}(\vartheta_1)B_1^{(1)}(\vartheta_2)-3B_3^{(1)}(\vartheta_1)B_3^{(1)}(\vartheta_2)+5B_5^{(1)}(\vartheta_1)B_5^{(1)}(\vartheta_2)-\ldots]}{[A_1^{(1)}(\vartheta_1)B_1^{(1)}(\vartheta_2)-A_3^{(1)}(\vartheta_1)B_3^{(1)}(\vartheta_2)+A_5^{(1)}(\vartheta_1)B_5^{(1)}(\vartheta_2)-\ldots]}\times$$

$$\times\frac{[A_1^{(1)}(\vartheta_1)A_1^{(1)}(\vartheta_2)-3A_3^{(1)}(\vartheta_1)A_3^{(1)}(\vartheta_2)+5A_5^{(1)}(\vartheta_1)A_5^{(1)}(\vartheta_2)-\ldots]}{[A_1^{(1)}(\vartheta_2)B_1^{(1)}(\vartheta_1)-A_3^{(1)}(\vartheta_2)B_3^{(1)}(\vartheta_1)+A_5^{(1)}(\vartheta_2)B_5^{(1)}(\vartheta_1)-\ldots]} \tag{28}$$

Здесь $A_m^{(n)}$ и $B_m^{(n)}$ — коэффициенты разложения четных и нечетных угловых нкций Матье в ряды по тригонометрическим функциям $\cos m\eta$ и $\sin m\eta$, водимые в справочных таблицах [8].

Результат (28) не изменяется, если в формуле поменять местами ϑ и ϑ_2. Это условие с учетом свойств рядов для $B_m^{(n)}(\vartheta)$ и $A_m^{(n)}(\vartheta)$ позволяет получить для $D_1(\vartheta_1, \vartheta_2)$ следующую форму аппроксимирующей функции

$$D_1 = -1 + a_{22}\vartheta_1^2\vartheta_2^2 + a_{24}\vartheta_1^2\vartheta_2^2(\vartheta_1^2 + \vartheta_2^2) + a_{44}\vartheta_1^4\vartheta_2^4 + \ldots \quad (29$$

В (29) под ϑ_2 понимается модуль действительного значения ϑ_2. Расчеты дали для коэффициентов (29) значения: $a_{22} = 0{,}404 \cdot 10^{-2}$; $a_{24} = 0$ $a_{44} = 0{,}44 \cdot 10^{-5}$.

Рис. 2. Дисперсионные характеристики основных типов волн: *а* — для волн $(EH)_{11}^{Ч}$ эллиптического волновода; *б* — для волн $(EH)_{11}^{Н}$ эллиптического волновода; *в* — для волн $(EH)_{11}^{К}$ круглого волновода

Решения дисперсионных уравнений для случаев поляризации электрического поля вдоль большой оси эллипса (нечетная волна) и поперек большой оси (четная волна) при $\xi_0 = 1$ ($e = c/a = 0{,}648$), представлены в форме дисперсионных характеристик на рис. 2. Для сравнения там же изображены пунктиром дисперсионные кривые диэлектрического волновода круглого сечения, причем горизонтальный масштаб пересчитан из условия равенства площадей поперечного сечения волноводов.

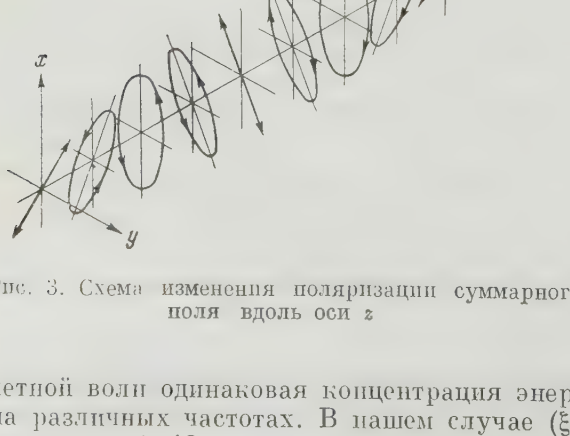


Рис. 3. Схема изменения поляризации суммарного поля вдоль оси z

Уместно отметить особенности волновых процессов, связанные с эллиптичностью сечения. Как видно из графиков, при поляризации электрического поля вдоль большой оси эллипса (нечетная волна) характеристика смещается влево от кривой, соответствующей круглому сечению. Для четной волны картина обратная. Это означает, что в случаях нечетной четной волн одинаковая концентрация энергии в диэлектрике наступает на различных частотах. В нашем случае ($\xi_0 = 1$, $e = 0{,}648$) разница частот при $\varepsilon_r \geqslant 10$ превышает 10%.

Реальный волновой процесс может быть возбужден так, что энергия распределится между четной и нечетной волнами. Из-за разности скоростей распространения волн поляризация суммарного поля изменяется вдоль оси z от чисто линейной до эллиптической с прямым эллипсом, как это показано схематически на рис. 3.

Дисперсионные кривые, построенные для различных значений параметра ξ_0 (или b/a), позволяют объяснить и рассчитать во многих случаях практики эффекты диэлектрического волновода, создаваемые прямоугольными диэлектрическими пластинами, в том числе гиродиэлектриками (ферритами), при различной их ориентации в пространстве или в металлической волноводной трубе.

5. КРИТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ВЫСШИХ ТИПОВ ВОЛН

Основные приближения дисперсионного уравнения можно получить также для случая преобладания угловых гармоник высшего порядка, т. е. для высших типов волн. Уравнения подобны (26) — (28) с той разницей, что нижние индексы 1 следует заменить на ν.

Вблизи критических условий — γ^2 приближается к $\omega^2\varepsilon_2\mu_2$ и $|\vartheta_2^2| = |c^2K_{c_2}^2| \to 0$. В связи с этим в дисперсионные уравнения вместо $K'c_\nu(\vartheta_2, \xi_0)/Kc_\nu(\vartheta_2, \xi_0)$ и $K's_\nu(\vartheta_2, \xi_0)/Ks_\nu(\vartheta_2, \xi_0)$ необходимо подставить пределы этих отношений при $\vartheta_2 \to 0$.

Для целей практики наибольший интерес представляет рассмотрение дисперсионных уравнений в критических условиях для волн типа $(EH)_{21}^{\text{ч}}$ и $(EH)_{21}^{\text{н}}$ ($\nu = 2$). Приводим без громоздких выкладок указанные выше асимптотические соотношения для случая $\nu = 2$:

$$\lim_{\vartheta_2\to 0} \frac{K'c_2(\vartheta_2, \xi)}{2Kc_2(\vartheta_2, \xi)} = \lim_{\vartheta_2\to 0} \frac{K's_2(\vartheta_2, \xi)}{2Ks_2(\vartheta_2, \xi)} = -(1 + \vartheta_2^2 a_2), \tag{30}$$

где

$$a_2 = \frac{e^{2\xi} - \frac{1}{3} - e^{-2\xi}}{16}.$$

Используя (30), получаем дисперсионное уравнение в критических условиях для нечетной волны в форме

$$\left[-\varepsilon_r\vartheta_2^2 \frac{R'c_2(\vartheta_1, \xi_0)}{Rc_2(\vartheta_1, \xi_0)} + 2\vartheta_1^2(1 + a_2\vartheta_2^2)\right]\left[\vartheta_2^2\mu_r \frac{R's_2(\vartheta_1, \xi_0)}{Rs_2(\vartheta_1, \xi_0)} + 2\vartheta_1^2(1 + a_2\vartheta_2^2)\right] = \pm D_2(\vartheta_1^2 + \mu_r\varepsilon_r\vartheta_2^2)(\vartheta_2^2 + \vartheta_1^2). \tag{31}$$

Анализ дает для коэффициента D_2 следующую формулу:

$$D_2 = -2^2 \frac{[A_2^{(2)}(\vartheta_1)B_2^{(2)}(\vartheta_2) - 2A_4^{(2)}(\vartheta_1)B_4^{(2)}(\vartheta_2) + 3A_6^{(2)}(\vartheta_1)B_6^{(2)}(\vartheta_2) - \ldots]}{[-2A_0^{(2)}(\vartheta_1)A_0^{(2)}(\vartheta_2) + A_2^{(2)}(\vartheta_1)A_2^{(2)}(\vartheta_2) - A_4^{(2)}(\vartheta_1)A_4^{(2)}(\vartheta_2) + \ldots]} \cdot \frac{[A_2^{(2)}(\vartheta_2)B_2^{(2)}(\vartheta_1) - 2A_4^{(2)}(\vartheta_2)B_4^{(2)}(\vartheta_1) + 3A_0^{(2)}(\vartheta_2)B_6^{(2)}(\vartheta_1) - \ldots]}{[B_2^{(2)}(\vartheta_1)B_2^{(2)}(\vartheta_2) - B_4^{(2)}(\vartheta_1)B_4^{(2)}(\vartheta_2) + \ldots]}.$$

В рабочей области значений ϑ_1 и ϑ_2 коэффициент D_2, так же как выше D_1, можно достаточно точно аппроксимировать функцией типа (29). Расчеты дают в этом случае следующие величины коэффициентов: $a_{22} = 7{,}70 \cdot 10^{-3}$; $a_{24} = -2{,}43 \cdot 10^{-4}$; $a_{44} = 2{,}60 \cdot 10^{-5}$. Погрешность расчета D_2 по этой формуле содержится практически лишь в третьем знаке. Используя эту аппроксимацию и ограничиваясь членами с ϑ_2 во второй степени, получаем из (31)

$$\vartheta_1^2 - \frac{1}{2}\vartheta_1^2\vartheta_2^2\left[\varepsilon_r \frac{R'c_2(\vartheta_1, \xi_0)}{Rc_2(\vartheta_1, \xi_0)} + \mu_r \frac{R's_2(\vartheta_1, \xi_0)}{Rs_2(\vartheta_1, \xi_0)}\right] + 2a_2\vartheta_1^4\vartheta_2^2 = \mp\{\vartheta_1^2 + \mu_r\varepsilon_r\vartheta_1^2\vartheta_2^2 + \vartheta_1^2\vartheta_2^2 - a_{22}\vartheta_1^6\vartheta_2^2 - a_{24}\vartheta_1^8\vartheta_2^2\}.$$

Если перед фигурной скобкой стоит минус и $|\vartheta_{21}^2| \to 0$, то уравнение может быть выполнено лишь в тех случаях, когда одна из дробей обращается в бесконечность, т. е. один из знаменателей обращается в нуль. Это соответствует корневым критическим условиям по функциям Rs и Rc, т. е. волнам так называемой ветви B [1]. В волноводе эллиптического сечения эта ветвь, как видим, раздваивается по четной и нечетной функциям. Другой знак перед скобкой дает критические условия, не определяемые корнями функций Rs и Rc (ветвь A). Для этой ветви получаем в случае нечетной волны $(HE)_{21}^{н}$

$$\mu_r \frac{R's_2(\vartheta_1, \xi_0)}{2Rs_2(\vartheta_1, \xi_0)} + \varepsilon_r \frac{R'c_2(\vartheta_1, \xi_0)}{2Rc_2(\vartheta_1, \xi_0)} = -(\mu_r \varepsilon_r + 1) + 2a_2\vartheta_1^2 + (\vartheta_1^4 a_{22} + \vartheta_1^6 a_{24}) \tag{32}$$

и в случае четной волны $(HE)_{21}^{ч}$

$$\mu_r \frac{R'c_2(\vartheta_1, \xi_0)}{2Rc_2(\vartheta_1, \xi_0)} + \varepsilon_r \frac{R's_2(\vartheta_1, \xi_0)}{2Rs_2(\vartheta_1, \xi_0)} = -(\mu_r \varepsilon_r + 1) + 2a_2\vartheta_1^2 + (\vartheta_1^4 a_{22} + \vartheta_1^6 a_{24}). \tag{33}$$

Рассчитанные критические точки по типам волн $(HE)_{21}$ нанесены на дисперсионных кривых основного типа (см. рис. 2). Точки рассчитаны по формулам (32) и (33).

В заключение следует отметить, что выражения, полученные для дисперсионных уравнений (26), (27), предельных соотношений (30) и критических условий (32), (33), можно обратить в соответствующие известные формулы для случая диэлектрического волновода круглого сечения [1, 2, 3], если использовать предельный переход: $\xi \to \infty$, $c \to 0$, ce^{ξ} — конечная величина. При этом следует иметь в виду, что дифференцирование радиальных функций Матье, зависящих от параметров ξ и ϑ, везде осуществляется только по параметру ξ. В то же время в теории волновода круглого сечения радиальная функция дифференцируется по полному аргументу, равноценному произведению вида $\vartheta \operatorname{ch} \xi$, $\vartheta \operatorname{sh} \xi$ или (при больших ξ) ϑe^{ξ}.

ВЫВОДЫ

1. Получены относительно простые приближенные выражения для дисперсионных уравнений волн диэлектрического волновода эллиптического сечения, а также для критических условий ближайших высших типов волн.

2. Получены формулы, позволяющие вычислять составляющие полей основных типов волн вне и внутри диэлектрика с учетом двух первых пространственных гармоник.

3. Приведены дисперсионные характеристики волновода для определенной эллиптичности сечения ($\xi_0 = 1$).

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. З. Каценеленбаум, Распространение электромагнитных волн вдоль диэлектрических стержней, Сб. научных трудов, вып. XI, Изд. Советское радио, 1948.
2. Н. А. Семенов, Параметры волн диэлектрического волновода, НДВШ (Радиотехника и электроника), 1959, 2, 67.
3. Г. З. Айзенберг, Антенны ультракоротких волн, Связьиздат, 1957.
4. L. J. Chu, Electromagnetic weves in elliptic hollow pipes of metal, J. Appl. Phys., 1938, 9, 9, 583.
5. М. Д. О. Стретт, Функции Ламе, Матье и родственные им в физике и технике, перев. с нем. под ред. А. М. Эфрос. ГНТИУ, Харьков — Киев, 1935.
6. L. J. Chu, J. A. Stratton, Elliptic and spheroidal wave functions, J. Math. and Phys., 1941, 20, 3, 259.
7. Н. В. Мак-Лахлан, Теория и приложения функций Матье, перев. с англ. под ред. И. Н. Денисюка, ИЛ, 1953.
8. J. A. Stratton, P. M. Morse, L. J. Chu, R. A. Hutner, Elliptic, cylinder and spheroidal wave functions, N. Y., 1942.

Поступила в редакцию
25 III 1961

961 № 11

ВЛИЯНИЕ РАЗБРОСА СКОРОСТЕЙ ЭЛЕКТРОНОВ НА РАБОТУ ЛАМПЫ ОБРАТНОЙ ВОЛНЫ

В. Н. Шевчик, Н. И. Синицын

Построена линейная теория ЛОВ с учетом разброса скоростей электронов и затухания в системе. На основании полученных результатов объясняется резкое увеличение пусковых токов низковольтных генераторов обратной волны в области низких частот диапазона электронной настройки.

ВВЕДЕНИЕ

Влияние разброса скоростей электронов на работу лампы обратной лны (ЛОВ) мало исследовано. Между тем, в некоторых случаях этот прос представляет определенный интерес.

Так, например, в низковольтных ЛОВ, где разброс скоростей электро- в может быть относительно большим, наблюдается резкое возрастание сковых токов в области низких частот диапазона электронной настрой- [1—3].

Эффект разброса скоростей электронов впервые оценил, используя номерный анализ Уоткинса и Рина [4], Джонсон [5]. Проведенный им ализ описывает явления лишь качественно, и теоретически предсказы- емые частоты, при которых прекращалась генерация колебаний ЛОВ спиралью, оказывались более низкими, чем наблюдавшиеся эксперитально.

Чжан, Шоу, Уоткинс [1] исследовали этот вопрос, рассмотрев упро- нную модель, в которой учитывалась связь волны замедляющей си- мы лишь с медленной волной пространственного заряда (большие зна- ния параметра пространственного заряда QC). Такой подход к решению чачи довольно сложен и лишен наглядности.

Целесообразно оценить влияние разброса электронов по скоростям работу ЛОВ методом последовательных приближений, разработанным им из авторов [6, 7], поскольку использование этого простого и наглядо метода позволяет учесть ряд эффектов, рассмотрение которых в рамстрогой линейной теории чрезвычайно затруднено [8, 9].

Суть метода заключается в том, что поле в системе рассчитывается по- довательными приближениями, причем в качестве нулевого приближе- выбирается невозмущенное состояние системы.

Для ЛОВ амплитуда поля волны, начиная со второго приближения, начительно отличается от первого приближения, и при анализе поле истеме можно с небольшой ошибкой представить в первом приближе- как возмущение «холодной» волны.

Метод носит энергетический характер, т. е. для определения поля ны первоначально рассчитывается мощность взаимодействия элект- ного потока с полем «холодной» системы.

В настоящей работе в линейном приближении анализируется влияние оброса скоростей электронов и затухания на работу ЛОВ.

В основу анализа положена методика, развитая Лопухиным [10] и золившая решить ряд задач электроники СВЧ. Пользуясь ею, Лопу- рассчитал, в частности, мощность взаимодействия бегущей электро-

магнитной волны и электронного потока с учетом кулоновских сил и разброса скоростей электронов [11]. Однако результаты работы [11] нельзя использовать в теории ЛОВ, поскольку они справедливы только для больших γl, т. е. для больших затуханий в системе, в то время как метод последовательных приближений при больших затуханиях неточен.

1. ВЫВОД ОСНОВНЫХ СООТНОШЕНИЙ

В рассматриваемой задаче электронный поток, характеризуемый постоянной $f_0(v)$ и переменной $f(v, z)e^{j\omega t}$ составляющими функции распределения электронов по скоростям, влетает в полупространство $z>0$, где задано электрическое поле вида

$$E_z = E_1 e^{\gamma z + j(\omega t - \beta z)}. \quad (1$$

Амплитуды всех переменных величин будем считать малыми, средний электронный заряд — компенсированным, столкновениями пренебрежем. Тогда поведение электронного потока можно описать линеаризованным кинетическим уравнением

$$j\omega f + v\frac{\partial f}{\partial z} + \frac{eE_z}{m}\frac{\partial f_0}{\partial v} = 0, \quad (2$$

где $f_0 \gg |f|$; $|\partial f_0/\partial v| \gg |\partial f/\partial v|$; e и m — заряд и масса электрона.

Выражение для плотности тока, как обычно, запишем в виде

$$i_z = e\int_{-\infty}^{\infty} vf(v, z)\,dv.$$

Воспользовавшись результатами интегрирования уравнения (2) с начальными условиями $f(v, z)|_{z=0} = f(v, 0)$ для немодулированного по скорости и плотности электронного потока ($f(v, 0) = 0$), вступающего в пространство взаимодействия с полем системы [10], имеем

$$i_z = -\frac{j\omega e^2 N_0}{mv_0^2}\int_0^z (u - z)E_z(u)\,e^{j\beta_e(u-z)}\left[1 + \varepsilon^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{6}\varepsilon^2\beta_e^2(u - z)^2 + j\beta_e(u-z)\varepsilon^2 + O(\varepsilon^4)\right]du, \quad (3$$

где $\varepsilon = \Delta v/2v_0 \ll 1$ — параметр разброса скоростей электронов; $O(\varepsilon^4)$ — остаточные члены порядка ε^4 и выше.

При этом разброс скоростей электронов характеризуется П-образной функцией распределения $f_0(v)$:

$$f_0(v) = \begin{cases} 0 & \text{для } -\infty < v < v_0 - \frac{\Delta v}{2}, \\ \frac{N_0}{\Delta v} & \text{для } v_0 - \frac{\Delta v}{2} < v < v_0 + \frac{\Delta v}{2}, \\ 0 & \text{для } v_0 + \frac{\Delta v}{2} < v < \infty, \end{cases} \quad (4$$

где N_0 и v_0 — средние значения концентрации и скорости электронов, Δv — разброс скоростей электронов в потоке. Функция $f_0(v)$ при помощи дельта-функции $\delta(v)$ выражается следующим образом:

$$f_0(v) = \frac{N_0}{\Delta v}\left\{\int_{-\infty}^{v}\delta\left[v - \left(v_0 - \frac{\Delta v}{2}\right)\right]dv - \int_{-\infty}^{v}\delta\left[v - \left(v_0 + \frac{\Delta v}{2}\right)\right]dv\right\}.$$

Производя в (3) интегрирование, получаем

$$i_z = \frac{j\omega I_0 e E_1}{m v_0^3} e^{-j\beta_e z} e^{j\omega t} e^{\delta z} \left\{ \frac{1+\varepsilon^2}{\delta^2} - \frac{\varepsilon^2\beta_e^2}{\delta^4} - \right.$$

$$- j \frac{2\beta_e\varepsilon^2}{\delta^3} + e^{-\delta z} \left[-\frac{1-\varepsilon^2}{\delta^2}(\delta z + 1) - \frac{\varepsilon^2\beta_e^2}{6\delta} z^3 + \frac{\varepsilon^2\beta_e^2}{2\delta^2} z^2 - \right.$$

$$\left. \left. + \frac{\varepsilon^2\beta_e^2}{\delta^3} z + \frac{\varepsilon^2\beta_e^2}{\delta^4} + j \frac{\beta_e\varepsilon^2}{\delta} z^2 + j \frac{2\beta_e\varepsilon^2}{\delta^2} z + j \frac{2\beta_e\varepsilon^2}{\delta^3} \right] \right\}, \qquad (6)$$

где I_0, V_0 — ток и напряжение луча; $\delta = \gamma + j\beta_e - j\beta$; $\beta = \omega/v_\Phi$; $\beta_e = \omega/v_0$; $v_0 = \sqrt{2e/m}\,V_0$.

Для случая $\varepsilon = 0$ из (6) получаем выражение для плотности конвекционного тока, найденное ранее [6].

Среднюю за период мощность взаимодействия рассматриваемого многоскоростного электронного потока с полем E_z найдем из формулы

$$P_e = \frac{1}{2} \int_0^l i_z E_z^* \, dz, \qquad (7)$$

где l — длина системы.

Используя (5), (6) и (7), получаем для электронной мощности взаимодействия

$$P_e = P_0 \frac{\xi\Phi_0}{4\Phi_0^3 \left(1 + \frac{\gamma^2 l^2}{\Phi_0^2}\right)^2} \left\{ \frac{e^{2\gamma l} - 1}{2\gamma} (1 + \xi_1 + j\xi_2) \left[2\gamma + j \left(\frac{\gamma^2 l^2}{\Phi_0^2} - 1 \right) (\beta_e - \beta) \right] + \right.$$

$$(1 - \xi_1 + j\xi_2) \left[2 - \left(2 + j \left(1 - \frac{\gamma^2 l^2}{\Phi_0^2} \right) \Phi_0 \right) e^{\gamma l - j\Phi_0} \right] +$$

$$+ \frac{1}{2} \left[\xi_2 - j\xi_1 + j\varepsilon^2 \left(1 - \frac{\varphi_0^2}{\Phi_0^2 + \gamma^2 l^2} \right) \right] \left[\left(\Phi_0^2 \left(1 + \frac{\gamma^2 l^2}{\Phi_0^2} \right) \left(\frac{\gamma l}{\Phi_0} + j \right) + \right. \right.$$

$$\left. \left. 2\Phi_0 \left(1 - \frac{\gamma^2 l^2}{\Phi_0^2} \right) - j4\gamma l + 2 \frac{\left(l + \frac{\gamma l}{\Phi_0} \right)^3}{1 + \frac{\gamma^2 l^2}{\Phi_0^2}} \right) e^{\gamma l - j\Phi_0} - 2 \frac{\left(l - \frac{\gamma l}{\Phi_0} \right)^3}{1 + \frac{\gamma^2 l^2}{\Phi_0^2}} \right] +$$

$$\left. + j \frac{\varepsilon^2 \varphi_0^2 \Phi_0}{6} \left(1 + \frac{\gamma^2 l^2}{\Phi_0^2} \right) e^{\gamma l - j\Phi_0} \right\}, \qquad (8)$$

где

$$\xi_1 = \varepsilon^2 \left[1 - \frac{2\varphi_0}{\Phi_0 \left(1 + \frac{\gamma^2 l^2}{\Phi_0^2} \right)} - \frac{\varphi_0^2 \left(\frac{\gamma^2 l^2}{\Phi_0^2} - 1 \right)}{\Phi_0^2 \left(1 + \frac{\gamma^2 l^2}{\Phi_0^2} \right)^2} \right];$$

$$\xi_2 = -\varepsilon^2 \left[\frac{2\varphi_0 \gamma l}{\Phi_0^2 \left(1 + \frac{\gamma^2 l^2}{\Phi_0^2} \right)} - \frac{2\varphi_0^2 \gamma l}{\Phi_0^3 \left(1 + \frac{\gamma^2 l^2}{\Phi_0^2} \right)^2} \right];$$

$\Phi_0 = (1 - v_0/v_\Phi)\varphi_0$ — относительный угол пролета электронов, движущихся со скоростью v_0; $\varphi_0 = \omega l/v_0$; $\xi = V_1/V_0$; $V_1 = E_1 l$.

При $\varepsilon = 0$ из формулы (8) получаются соответствующие выражения для односкоростного приближения [6]. Если же интересоваться случаем больших γl, то, полагая $e^{\gamma e} \gg 1$ и удерживая только главный член $\sim e^{\gamma l}$, приходим к выражению для мощности взаимодействия тока и поля, найденному в работе [11] (в отсутствие кулоновских сил).

2. АНАЛИЗ ПОЛУЧЕННЫХ СООТНОШЕНИЙ

Для случая отсутствия потерь в линии ЛОВ ($\gamma = 0$) выражение (8) можно соответственно преобразовать и получить для активной P_{ea} и реактивной P_{er} составляющих мощности соотношения

$$P_{ea} = P_0 \frac{\xi^2\varphi_0}{4\Phi_0^3}\{[2(1-\cos\Phi_0)-\Phi_0\sin\Phi_0]+\varepsilon^2\left[2(1-\cos\Phi_0)-\Phi_0\sin\Phi_0-\right.$$
$$-\frac{2\varphi_0}{\Phi_0}\left(\frac{\Phi_0^2}{2}\cos\Phi_0+3(1-\cos\Phi_0)-2\Phi_0\sin\Phi_0\right)+\frac{\varphi_0^2}{\Phi_0^2}\left(\Phi_0^2\cos\Phi_0+\right.$$
$$\left.\left.\left.+4(1-\cos\Phi_0)+\left(\frac{\Phi_0^3}{6}-3\Phi_0\right)\sin\Phi_0\right)\right]\right\}, \qquad (9)$$

$$P_{er} = P_0 \frac{\xi^2\varphi_0}{4\Phi_0^3}\left\{[2\sin\Phi_0-\Phi_0(1+\cos\Phi_0)]+\varepsilon^2\left[2\sin\Phi_0-\Phi_0(1+\cos\Phi_0)+\right.\right.$$
$$+\frac{2\varphi_0}{\Phi_0}\left(\Phi_0-3\sin\Phi_0+\frac{\Phi_0^2}{2}\sin\Phi_0+2\Phi_0\cos\Phi_0\right)-\frac{\varphi_0^2}{\Phi_0^2}\left(\Phi_0-4\sin\Phi_0+\right.$$
$$\left.\left.\left.+\Phi_0^2\sin\Phi_0-\frac{\Phi_0^3}{6}\cos\Phi_0+3\Phi_0\cos\Phi_0\right)\right]\right\}. \qquad (10)$$

На рис. 1 и 2 представлен ход функций $P_{ea}/P_0\xi^2\varphi_0$ и $P_{er}/P_0\xi^2\varphi_0$, полученных из (9) и (10) для различных значений параметра разброса скоро-

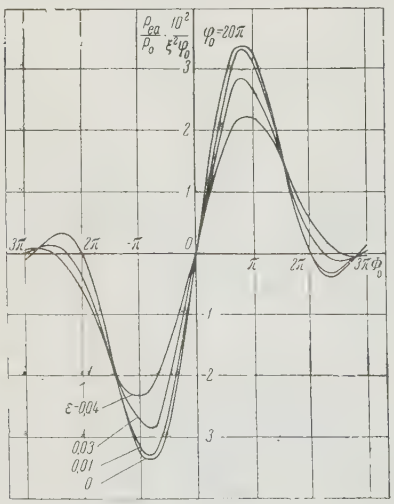


Рис. 1

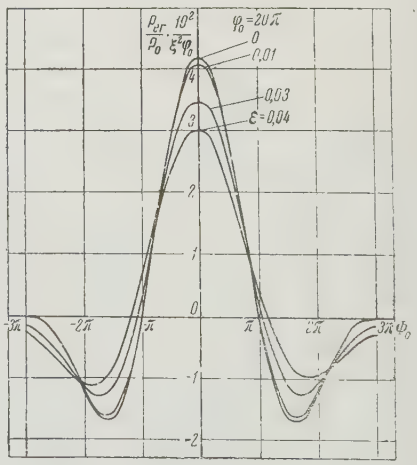


Рис. 2

стей электронов ε в зависимости от Φ_0, причем последний меняется за счет изменения фазовой скорости волны при постоянных значениях l, ω, v_0. Как следует из кривых рис. 1, мощность взаимодействия электронного потока с полем системы сильно зависит от степени разброса скоростей электронов.

Следует отметить, что при синхронизме электронов и волны ($\Phi_0 = 0$), в отличие от случая $\varepsilon = 0$, многоскоростной электронный поток в целом отбирает энергию у системы. Этот результат имеет ясное физическое толкование: в лампе, имеющей определенную длину взаимодействия l, более медленные электроны, ускоряемые полем системы, находятся большее время, чем быстрые. Отсюда же становится понятной и некоторая асимметрия кривых P_{ea} и P_{er} относительно Φ_0.

Проведенный анализ верен для расчета мощности взаимодействия электронного потока как с прямыми, так и с обратными волнами, и, в частности, позволяет оценить снижение выходной высокочастотной мощности электронного фазовращателя, использующего низковольтные электронные потоки.

Выделяя в выражении (8) действительную P_{ea} и мнимую P_{er} части, можно найти амплитуду поля «вторичной» волны

$$E_2 = E_{2a} + jE_{2r}, \tag{11}$$

наведенной в замедляющей линии электронным потоком, сгруппированным в поле «первичной» волны, которое нам и задано в качестве нулевого приближения.

Если K — сопротивление связи замедляющей системы, то на основании закона сохранения энергии можно записать

$$P_{ea} + jP_{er} = \frac{E_1^2}{2\beta^2 K} - \frac{(E_1 e^{\gamma z} + E_2)^2}{2\beta^2 K} + P_\gamma, \tag{12}$$

где мощность потерь в линии P_γ определяется соотношением

$$P_\gamma = \frac{E_1^2 e^{2\gamma z}}{2\beta^2 K} - \frac{E_1^2}{2\beta^2 K}.$$

Из уравнения (12), используя (11), получим составляющие «вторичного» поля

$$E_{2a} = \frac{4P_{ea}}{P_0 \xi^2 \varphi_0} (2\pi CN)^3 E_1 e^{-\gamma z}, \tag{13}$$

$$E_{2r} = -\frac{4P_{er}}{P_0 \xi^2 \varphi_0} (2\pi CN)^3 E_1 e^{-\gamma z}, \tag{14}$$

где

$$C^3 = \frac{J_0 K}{4V_0}; \quad N = \frac{\beta_e l}{2\pi}.$$

Соотношения (1), (13), (14) позволяют легко построить распределение амплитуды поля в лампе.

Пользуясь условием генерации на обратной волне

$$E_1 e^{\gamma l} + E_{2a}(l) + jE_{2r}(l) = 0, \tag{15}$$

получаем в общем виде пусковые условия ЛОВ

$$CN = \frac{1}{2\pi} \sqrt[3]{\frac{e^{2\gamma l}}{\frac{4P_{ea}}{P_0 \xi^2 \varphi_0}}}, \tag{16}$$

$$P_{er} = 0. \tag{17}$$

Для случая $\gamma = 0$ результаты графического анализа дают возможность легко получить закон увеличения пускового тока генератора обратной волны с ростом ε (рис. 3).

Отметим, что проведенный анализ справедлив для малых CN (порядка 0,5 и ниже).

Интересно оценить правомерность принятого в анализе приближения. В выражении (3) отброшены члены порядка ε^4 и выше. Учет ε^4 при расчете плотности тока и мощности взаимодействия электронного потока с полем системы очень сильно усложняет выражения для P_{ea} и P_{er} и, таким образом, затрудняет нахождение пускового тока. Этот расчет был проделан для частного случая $\Phi_0 = 0$. Оценка показала, что поправка, даваемая таким учетом, очень мала; поэтому с достаточным приближением может применяться соотношение (8). Однако экстраполяция (8) на случай достаточно больших ε может привести к принципиальным ошибкам. Для реальных длин замедляющих систем низковольтных ЛОВ ($\varphi_0 \simeq 40\,\pi$) величина ε при расчете по найденным формулам не должна превышать 0,02 (на рис. 1—3 для иллюстрации полагалось $\varphi_0 = 20\,\pi$ и потому формулы верны вплоть до $\varepsilon = 0{,}04$).

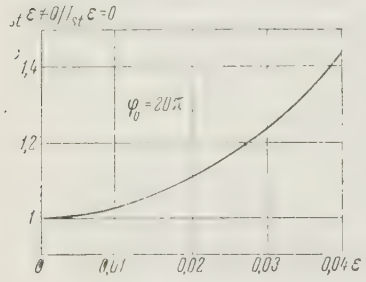


Рис. 3

В рассмотренной задаче причина разброса скоростей электронов не конкретизировалась. Поэтому в частном случае ее можно связать с провисанием потенциала, характерным для низковольтных ЛОВ. Рассматриваемая при этом модель отличается от конкретных схем тем, что разноскоростные электроны считаются перемешанными по сечению пучка.

Несмотря на указанное приближение, на основании проведенного анализа можно заключить, что причиной резкого увеличения пусковых токов низковольтных генераторов обратной волны к низкочастотному концу диапазона электронной настройки является разброс скоростей электронов. Подобное заключение подтверждается объяснением результатов работы [1], в которой экспериментально показано, что причиной резкого возрастания пусковых токов является разброс скоростей электронов. На низкочастотном конце диапазона электронной настройки теория, не учитывающая разброса электронов по скоростям, дает для величины пускового тока значение 12 *ма*, в то время как действительная величина его равна 24 *ма*. Соответствующий расчет по формулам (9) и (10) приводит к увеличению теоретически найденного пускового тока до 16,7 *ма*. Если же значение ε определять из действительной величины пускового тока, то она увеличивается до 21,2 *ма*, что близко к экспериментальным значениям. С увеличением частоты эффект разброса скоростей электронов очень быстро становится пренебрежимо малым.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В обычных лампах обратной волны влияние разброса скоростей электронов очень мало и верна обычная односкоростная теория. Лишь на низкочастотном конце диапазона электронной настройки низковольтных ламп обратной волны оно приводит к резкому увеличению пусковых токов.

ЛИТЕРАТУРА

1. N. C. Chang, A. W. Shaw, D. A. Watkins, The effect of beam cross-sectional velocity variation on backward-wave oscillator current, IRE Trans. Electron Devices, 1959, **6**, 4, 437.
2. W. L. Beaver, Backward-wave oscillators for low voltage operation, IRE Convention Record, 1956, **4**, 3, 35.
3. N. C. Chang, A helix type backward-wave oscillator in permanent magnet package, Electronic Components Conf. Proc., Los Angeles, California, 1955, p. 47—49.
4. D. A. Watkins, N. Rynn, Effect of velocity distribution of travelling-wave tube gain, J. Appl. Phys., 1954, **25**, 11, 1375.

5. H. Johnson, Backward-wave oscillators, Proc. I. R. E., 1955, **43**, 6, 684.
6. В. Н. Шевчик, Основы электроники СВЧ, Изд. Советское радио, 1959.
7. В. Н. Шевчик, О соотношении между приближением заданного поля и методом последовательных приближений Компфнера в теории лампы обратной волны, Радиотехника и электроника, 1959, **4**, 1, 147.
8. В. Н. Шевчик, Д. И. Трубецков, К теории лампы обратной волны с периодической фокусировкой потока электронов, Радиотехника и электроника, 1960, **5**, 10, 1734.
9. В. Н. Шевчик, Ю. Д. Жарков, Влияние отражений на работу лампы обратной волны, Радиотехника и электроника, 1960, **5**, 12, 2059.
10. В. М. Лопухин, Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками, ГИТТЛ, 1953.
1. В. М. Лопухин, Расчет мощности взаимодействия бегущей электромагнитной волны и электронного потока с учетом кулоновских сил и разброса скоростей электронов, Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1958, **1**, 2, 27.

Поступила в редакцию
29 III 1961

ПЛАЗМЕННОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЧАСТОТОЙ ГЕНЕРАТОРА ТИПА ЛАМПЫ БЕГУЩЕЙ ВОЛНЫ*

В. Д. Иванова, В. С. Михалевский

Экспериментально исследована возможность управления частотой генератора типа ЛБВ, помещенного внутри плазменной трубки, путем изменения собственной частоты плазмы. В дециметровом диапазоне волн получено изменение частоты, носящее скачкообразный характер в отношении $\sim 1:2$.

Теоретически рассчитаны волновые сопротивления и дисперсионные характеристики для случая неограниченной плазмы, а также дисперсионные характеристики с учетом конечной толщины плазменной трубки. Установлено качественное соответствие теории с экспериментом.

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрение дисперсионных свойств спирали, помещенной в изотропную плазму [1], приводит к заключению о возможности изменения дисперсии такого рода замедляющей системы при постоянстве ее геометрии. Действительно, как показывает эксперимент [1], изменение собственной частоты плазмы ω_0 позволяет существенным образом изменять ход дисперсии. В настоящей работе, в развитие ранее полученных результатов [1], экспериментально исследована возможность использования изменения дисперсии в целях управления частотой генератора типа ЛБВ со спиральной замедляющей системой и безмагнитной фокусировкой пучка. В связи с этим теоретически рассмотрено влияние плазмы на волноводные свойства односпиральной замедляющей линии, окруженной с внешней стороны изотропной плазмой с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_1 = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}$; $\omega_0^2 = 4\pi e^2 n_e/m$, где n_e — концентрация электронов в плазме; ω — циклическая частота колебаний в системе; e и m — заряд и масса электрона. Определены также значения эквивалентных волновых сопротивлений K для случая неограниченной плазмы и рассчитаны дисперсионные характеристики замедляющей системы с учетом конечной толщины слоя плазмы, окружающего спираль.

1. ВОЛНОВЫЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Эффективность взаимодействия медленных волн, распространяющихся в спирали, с электронным потоком, движущимся вдоль нее, характеризуется значением волнового сопротивления $K = |E_z|^2/2\beta^2 P$, где E_z — составляющая напряженности электрического поля вдоль оси спирали (ось z): β — фазовая постоянная распространения волн вдоль замедляющей системы; P — полный поток мощности, складывающийся из потоков внутри и вне спирали, в цилиндрической системе координат определится как

$$P = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\iint\limits_S [EH^*]dS = \frac{1}{2}\operatorname{Re}\iint\limits_S (E_r H_\varphi^* - E_\varphi H_r^*)\,dS;$$

* Доложено на 4-й Всесоюзной конференции Министерства высшего и среднего специального образования СССР по радиоэлектронике, Харьков, октябрь 1960 г.

S — площадь круга радиуса r, охватывающего спираль. Звездочками обозначены комплексно-сопряженные значения составляющих напряженности электрического и магнитного полей E и H.

Используя схему расчета P и K, изложенную в работе Гвоздовера [2], при аппроксимации спирали радиуса a эквивалентным проводящим цилиндром с идеальной проводимостью, получим для значения K на оси спирали при $r = 0$

$$K = \frac{R_0}{\pi a^4 \beta^3 k} \frac{1}{\Delta}, \tag{1}$$

где

$$R_0 = \sqrt{\mu_0/\varepsilon_0}; \quad \Delta = \left[\frac{S(\varkappa) I_1(\varkappa)}{\varkappa^2 I_0(\varkappa)} F + \frac{S'(y) K_1(y)}{y^2 K_0(y)} F'\right] I_0^2(\varkappa);$$

$$F = 1 - \frac{\varkappa}{y} \frac{I_1(\varkappa) K_0(y)}{I_0(\varkappa) K_1(y)} A(y, \varkappa, \varepsilon);$$

$$F' = \varepsilon + \frac{y}{\varkappa} \frac{I_1(\varkappa) K_0(y)}{I_0(\varkappa) K_1(y)} A(y, \varkappa, \varepsilon);$$

S и S' — функции от аргументов $\varkappa = a\gamma$ и $y = a\gamma_1$ вида

$$S(\varkappa) = \frac{I_1(\varkappa)}{I_0(\varkappa)} - \frac{I_0(\varkappa)}{I_1(\varkappa)} + \frac{2}{\varkappa};$$

$$S'(\varkappa) = \frac{K_0(\varkappa)}{K_1(\varkappa)} - \frac{K_1(\varkappa)}{K_0(\varkappa)} + \frac{2}{\varkappa};$$

$$A(y, \varkappa, \varepsilon) = \frac{\frac{y}{\varkappa} - \varepsilon \frac{I_0(\varkappa) K_1(y)}{I_1(\varkappa) K_0(y)}}{\frac{y}{\varkappa} - \frac{I_0(\varkappa) K_1(y)}{I_1(\varkappa) K_0(y)}};$$

I_0, I_1, K_0, K_1 — модифицированные функции Бесселя. Параметры γ_1 и γ относятся к областям с плазмой и без нее, $\gamma_1 = \sqrt{\beta^2 - \varepsilon k^2}$, $\gamma = \sqrt{\beta^2 - k^2}$, $k = \omega/c$, $\beta = \omega/v$ ($\beta^2 > \varepsilon k^2$), где v — фазовая скорость волны, распространяющейся вдоль замедляющей системы. Значения диэлектрической и магнитной проницаемостей ε_1, μ_1 и ε_0, μ_0 отвечают плазме и вакууму; $\varepsilon = \varepsilon_1/\varepsilon_0$.

Таблица 1

Индексы спирали и частоты	Радиус спирали a, мм	Шаг спирали h, мм	ω_0, Мгц
1	4,8	1,3	18750
2	4,8	1,8	6250
3	—	—	3100

На рис. 1 даны графики зависимости K (в омах) от λ—длины волны в свободном пространстве, рассчитанные по соотношению (1) для конкретных значений геометрии спиралей и ω_0 при условии $\mu_1 = \mu_0$. Там же в целях сопоставления приведены значения K_c — волнового сопротивления спиральной замедляющей системы в отсутствие плазмы (пунктир). В связи с тем, что K лежит в широком интервале значений и масштаб рис. 1 неприменим ко всем кривым, изменение его в ряде случаев показано соответствующим множителем. Значения ω_0 в мегагерцах и геометрия спиралей указаны в табл. 1.

На рис. 2 представлены дисперсионные характеристики, т. е. зависимости c/v от λ для спиральных замедляющих систем, соответствующих данным, указанным на рис. 1. Расчет характеристик проводился по уравнению (1) работы [1]. Цифры у кривых, приведенные на рис. 1—3, означают: первая цифра — номер спирали по табл. 1, вторая — частота ω_0.

Как следует из рис. 1, характерной особенностью K является то обстоя тельство, что значения волновых сопротивлений при наличии плазмы н несколько порядков больше аналогичных значений в отсутствие ее. Эт положение остается верным и для малых λ. Так, например, хотя для спи рали *11* значения K малы в области длин волн 1—10 *см*, тем не мене они в этом диапазоне на два порядка больше K_c. При переходе от по ложительной к отрицательной дисперсии поток мощности, уменьшаяс и проходя при некотором значении $\lambda = \lambda_{макс}$ через нуль, изменяет знак

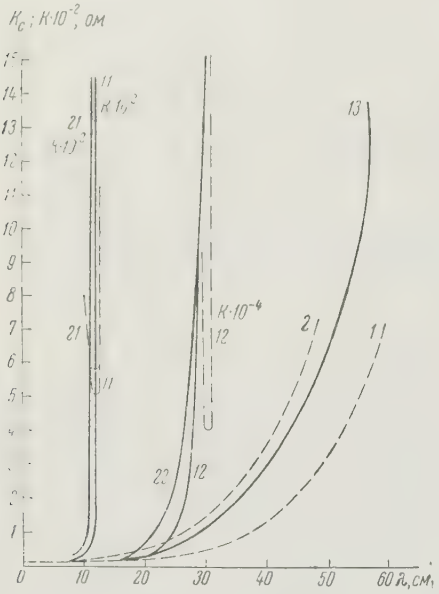


Рис. 1. Волновые сопротивления спиральной замедляющей системы, окруженной неограниченным слоем плазмы

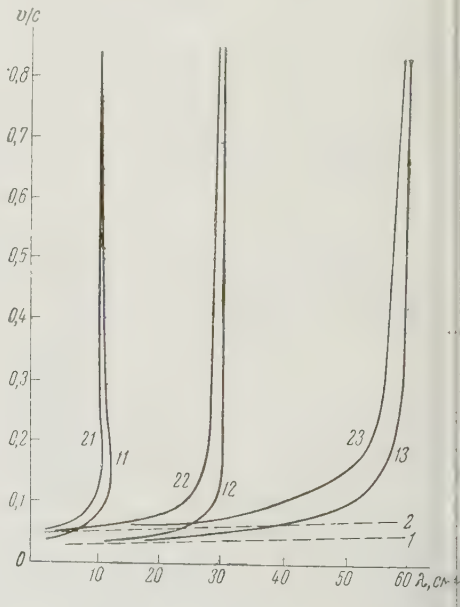


Рис. 2. Дисперсионные характеристик спиральной замедляющей системы, о руженной неограниченным слоем плазм

На дисперсионных кривых (рис. 2) значению $\lambda = \lambda_{макс}$ отвечает явлени «отсечки», определяемое тем условием, что при заданном ω_0, $\lambda_{макс}$ являетс верхней границей для медленных волн, могущих распространяться в за медляющей системе. Таким образом, в точке отсечки поток мощност изменяет направление соответствен но с изменением направления группо вой скорости.

Таблица 2

ω_0, *Мгц*	ω, *Мгц*
18750	16700—16000
6250	6300
3100	3150

В области отрицательной диспер сии величина потока мощности, про ходя (по абсолютной величине) чере некоторый максимум, быстро убыва ет. Значение K в силу этого вблиз точки отсечки с ростом λ резко ра стет; при этом K проходит через резко выраженный минимум. Отмечен ная особенность поведения P и K вблизи $\lambda_{макс}$ аналогична до некоторо степени особенности, характерной для медленных волн в случае ленточно спирали, рассмотренной, в частности, в работе Советова и Сухова [3].

С убыванием ω_0 ветви K, отвечающие участкам с отрицательной ди персией (штрих-пунктир на рис. 1), растут, смещаясь в область бо́льших λ. При этом, как видно на рис. 1, для малых значений ω_0 такая ветвь (кривая *13*) отсутствует. С ростом ω_0 (рис. 2) $\lambda_{макс}$ смещается в сторон коротких волн. Как показывает расчет, отсечка происходит вблизи $\varepsilon \simeq$

и $\omega \simeq \omega_0$, т. е. определяется переходом от области частот, близких, но бо́льших собственной частоты плазмы, к частотам, меньшим ω_0. Сопоставление значений ω_0, данное в табл. 2, со значениями ω, отвечающими $\lambda_{макс}$ (рис. 2), подтверждает это положение.

2. СЛОЙ ПЛАЗМЫ КОНЕЧНОЙ ТОЛЩИНЫ

В связи с тем, что практически при конструировании макета лампы слой плазмы, окружающий спираль, имеет конечную толщину, интересно определить дисперсионные свойства замедляющей системы для этого случая. Используя обычную схему решения задач данного типа в цилиндрической системе координат в приближении спирально проводящего цилиндра с идеальной проводимостью [4], получим дисперсионное уравнение в виде

$$\frac{k^2}{\gamma^2}\operatorname{ctg}^2\psi = \frac{y}{\varkappa}\,\frac{\dfrac{I_0(\varkappa)}{I_1(x)} - \dfrac{y}{\varkappa}\left[\dfrac{BI_0(y) - K_0(y)}{BI_1(y) + K_1(y)}\right]}{\dfrac{y}{\varkappa}\dfrac{I_1(x)}{I_0(\varkappa)} - \varepsilon\left[\dfrac{B\varepsilon\, I_1(y) + K_1(y)}{B\varepsilon I_0(y) - K_0(y)}\right]}, \qquad (2)$$

где

$$B = \frac{K_0(w)K_1(g) - \dfrac{g}{w}K_1(w)K_0(g)}{I_0(w)K_1(g) + \dfrac{g}{w}I_1(w)K_0(g)};$$

$$B = \frac{\dfrac{w}{g}K_0(w)K_1(g) - \varepsilon K_1(w)K_0(g)}{\dfrac{w}{g}I_0(w)K_1(g) + \varepsilon I_1(w)K_0(g)}, \qquad g = b\gamma;\ w = b\gamma_1;$$

$$\varkappa = a\gamma;\quad y = a\gamma_1;$$

ψ — угол подъема спирали; a и b — внутренний и внешний радиусы слоя плазмы, окружающего спираль; $\mu_1 = \mu_0$. При $b \to \infty$ B и B_ε стремятся к нулю и дисперсионное уравнение (2) переходит в соотношение (1) из [1].

На рис. 3 приведены дисперсионные характеристики для конкретных значений геометрии спиралей и ω_0, определяемых табл. 1, рассчитанные для различных значений b/a. Характерным для дисперсионных характеристик является наличие двух ветвей, отвечающих коротковолновой и длинноволновой областям. Левые коротковолновые ветви с изменением

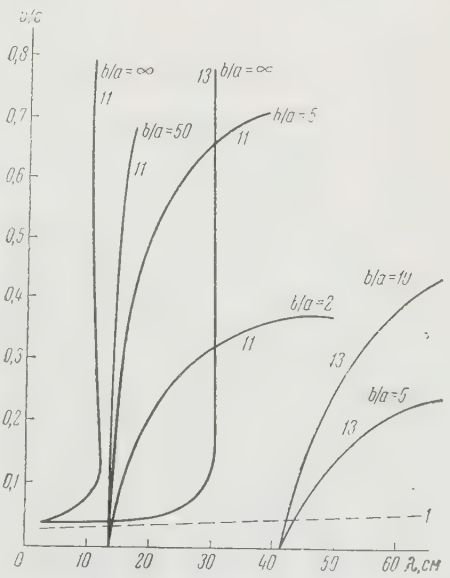


Рис. 3. Дисперсионные характеристики спиральной замедляющей системы, окруженной слоем плазмы конечной толщины

b/a в широких пределах остаются практически неизменными, совпадая с дисперсионными характеристиками в случае неограниченной плазмы. Действительно, только при больших значениях $\omega_0 \simeq 10^4$ *Мгц* левая ветвь дисперсионной характеристики при конечном слое плазмы несколько смещается влево относительно характеристики при $b/a \to \infty$. Правые вет-

ви по мере уменьшения b/a становятся более пологими, приближаясь к дисперсионной характеристике в отсутствие плазмы. При этом, по мере уменьшения фазовой скорости, правые ветви стремятся к некоторому предельному значению $\lambda = \lambda_0$, определяемому соотношением $\omega = \omega_0/\sqrt{2}$. Последнее может быть получено из уравнения (2) при $y \gg 1$, $w \gg 1$ и $\varkappa \gg 1$, $\varkappa \gg 1$. Дисперсионное уравнение в этом случае дает два предельных значения фазовой скорости: $v = c\sin\psi$ для коротких волн и $v = 0$ для $\omega = \omega_0/\sqrt{2}$.

Таким образом, дисперсионные характеристики спиральной замедляющей системы в случае конечной толщины слоя плазмы, имея коротковолновую и длинноволновую ветви, могут изменяться с изменением ω_0 в широких пределах, обеспечивающих возможность плазменного управления частотой.

3. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ЧАСТЬ

В целях экспериментальной проверки возможности плазменной перестройки частоты был собран макет лампы типа ЛБВ с центробежно-электростатической фокусировкой электронного пучка, работавшей в режиме непрерывной откачки. Замедляющая система лампы состояла из спирали радиуса $a = 5$ *мм* при $h = 1{,}5$ *мм*. Спираль при этом непосредственно соприкасалась с внутренней стенкой баллона лампы. С наружной стороны к стеклянному баллону лампы соосно с ним был приварен баллон бо́льшего радиуса, в котором создавалась плазма за счет тлеющего разряда в парах ртути при давлении порядка 0,1 *мм* рт. ст. Таким образом, спираль и плазма были разделены на всем протяжении замедляющей системы только тонким слоем стекла $b/a = 5$.

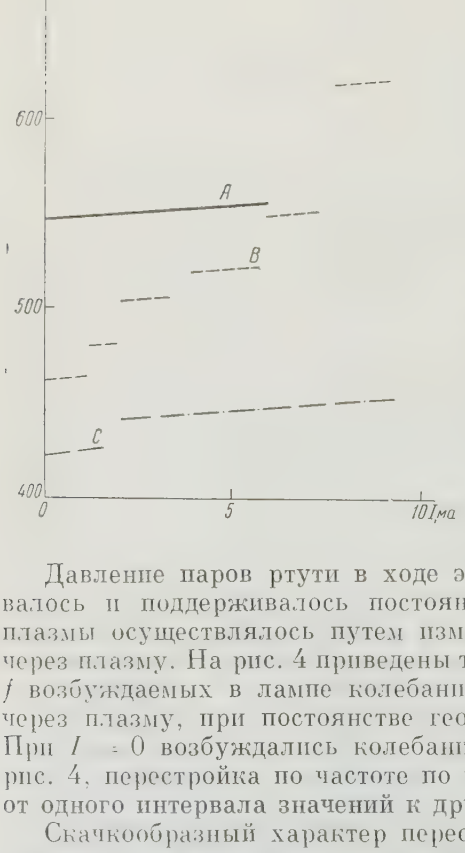


Рис. 4. Зависимость частоты колебаний, возбуждаемых в ЛБВ, от величины тока, протекающего через плазму. A — U_a = = 700 *в*, B — U_a = 780 *в*, C — U_a = 900 *в*

Давление паров ртути в ходе эксперимента непрерывно контролировалось и поддерживалось постоянным. Изменение собственной частоты плазмы осуществлялось путем изменения величины тока, протекающего через плазму. На рис. 4 приведены типичные графики зависимости частоты f возбуждаемых в лампе колебаний от величины тока I, протекающего через плазму, при постоянстве геометрии и режима работы генератора. При $I = 0$ возбуждались колебания на частоте 400 *Мгц*. Как видно из рис. 4, перестройка по частоте по мере изменения I происходит скачком от одного интервала значений к другому.

Скачкообразный характер перестройки в значительной мере обусловлен тем, что в лампе осуществлялась внутренняя обратная связь за счет отражения от концов несогласованной спирали. Плавное изменение частоты с ростом I в пределах каждого интервала, отвечающего возбуждению колебаний вблизи некоторого значения f, лежит в пределах 1—2% (U_a = = 780 *в*) до 10% (U_a = 700 и 900 *в*). Наиболее эффективное изменение наблюдается при некотором фиксированном значении анодного напряже

ния U_a. Для этого оптимального значения ($U_a = 780$ *в*) общее изменение частоты определяется отношением порядка 1 : 2. Нетрудно видеть, что изменение f в зависимости от I на рис. 4 соответствует на рис. 2 и 3 перемещению вдоль пересекающей дисперсионные характеристики некоторой горизонтальной прямой $v/c = \text{const}$, удовлетворяющей условию $v \simeq v_e \sim \sqrt{U_a}$, где v_e — скорость электронного потока. При этом с ростом I, а следовательно, и ω_0 происходит смещение возбуждаемых колебаний в сторону более коротких волн. Таким образом, сопоставление экспериментальных результатов с теоретически рассчитанными позволяет прийти к выводу об их качественном соответствии и возможности плазменного управления частотой генератора.

ЛИТЕРАТУРА

1. В. Д. Иванова, В. С. Михалевский, Дисперсионные свойства спирали, помещенной в плазму, Радиотехника и электроника, 1959, 4, 11, 1932.
2. С. Д. Гвоздовер, Теория электронных приборов сверхвысоких частот, ГИТТЛ, 1956.
3. Н. М. Советов, А. В. Сухов, К вопросу о расчете потока мощности и сопротивлений связи в ленточной спирали, Радиотехника и электроника, 1957, 2, 5, 622.
4. В. М. Лопухин. Возбуждение электромагнитных колебаний и волн электронными потоками, ГИТТЛ, 1953.

Поступила в редакцию
2 III 1961

ПОЛОСА ПРОПУСКАНИЯ И КОЭФФИЦИЕНТ ШУМА РЕЗОНАНСНОГО УСИЛИТЕЛЯ НА ТУННЕЛЬНОМ ДИОДЕ

Л. А. Биргер

Выведены точные формулы для расчета полосы пропускания и коэффициента шума резонансного усилителя на туннельном диоде. Учтено влияние распределенности параметров контура, потерь, а также индуктивности вводов. Проанализировано влияние связи с нагрузкой.

Приведенные в литературе [1, 2, 3] приближенные формулы для полосы пропускания $2\Delta f$ и коэффициента шума F резонансного усилителя на туннельном диоде правильно отображают основные свойства таких усилителей, но не содержат некоторых подробностей, полезных для детального расчета усилителя и оценки пределов применимости приближенных формул. Так, например, формулы для $2\Delta f$ предполагают, что резонансный контур состоит из сосредоточенных емкости и индуктивности, в то время как для высокочастотных усилителей типично применение распределенных контуров. Не показана в явном виде зависимость $2\Delta f$ при заданном коэффициенте усиления K_0 от рабочей частоты $\omega_0 = 2\pi f_0$.

Приближенные формулы для F показывают целесообразность уменьшения связи контура с нагрузкой, но остаются неясными допустимые пределы уменьшения связи. Наконец, формулы для $2\Delta f$ и F не учитывают индуктивности вводов туннельного диода, что при достигнутых рабочих частотах усилителей хотя и не приводит к заметным ошибкам, но и не выявляет пределов, в которых пренебрежение индуктивностью допустимо.

Чтобы получить более точные выражения для основных характеристик резонансного усилителя, были проведены расчеты, основные результаты которых изложены ниже.

Расчет основан на общепринятой эквивалентной схеме туннельного диода (рис. 1, *а*), где $-R_д$ — отрицательное сопротивление в рабочей точке; $r_д$ — сопротивление потерь в диоде; $C_д$ — емкость p — n-перехода; $L_д$ — индуктивность вводов. Генератор шумового тока I_1 отображает дробовой шум в p — n-переходе, генератор I_2 — тепловой шум в активном сопротивлении $r_д$. Интенсивности этих источников шума выражаются формулами

$$\overline{I_1^2} = 2eI_0\Delta f, \tag{1}$$

где I_0 — постоянный ток в рабочей точке, e — заряд электрона,

$$\overline{I_2^2} = 4kT\Delta f \ \frac{1}{r_д}, \tag{2}$$

где T — температура диода (в градусах Кельвина), k — постоянная Больцмана.

Для удобства расчетов схема, показанная на рис. 1, *а*, пересчитывается на эквивалентную «параллельную» схему (рис. 1, *б*).

Произведя простые, но громоздкие преобразования, можно показать, что параметры параллельной схемы выражаются следующими формулами:

$$g_{дэ} = -\frac{1}{R_д}\frac{u(\theta)}{w(\theta)}, \tag{3}$$

$$jb_{дэ} = \frac{j\theta}{R_д}\frac{v(\theta)}{w(\theta)}, \tag{4}$$

$$\overline{I^2_{1э}} = (2eI_0\Delta f)\frac{1}{w(\theta)}, \tag{5}$$

$$\overline{I^2_{2э}} = (4kT\Delta f\ \frac{1}{R_д})\,\xi\,\frac{1+\theta^2}{w(\theta)}, \tag{6}$$

где обозначено:

$$u(\theta) = 1 - \xi - \xi\theta^2; \tag{7}$$

$$v(\theta) = 1 - \frac{1}{\theta^2_д} - \frac{\theta^2}{\theta^2_д}; \tag{8}$$

$$w(\theta) = \theta^2\left(\left(\xi - \frac{1}{\theta^2_д}\right)^2 + \left(1 - \xi - \frac{\theta^2}{\theta^2_д}\right)\right); \tag{9}$$

$$\theta = \omega\tau_д; \tag{10}$$

$$\tau_д = R_д C_д; \tag{11}$$

$$\xi = \frac{r_д}{R_д}; \tag{12}$$

$$\theta_д = \omega_д\,\tau_д; \tag{13}$$

$$\omega_д = \frac{1}{\sqrt{L_д C_д}}. \tag{14}$$

Напомним, что туннельный диод обеспечивает возможность усиления, пока рабочая частота ниже некоторого предельного значения $\omega_{пр}$ (или $\theta < \theta_{пр} = \omega_{пр}\tau_д$), на котором его эквивалентная проводимость $g_{дэ}$ обращается в нуль. Из (3) и (7) следует

$$\theta_{пр} = \omega_{пр}\tau_д = \sqrt{\frac{1-\xi}{\xi}}. \tag{15}$$

На рис. 2 показана зависимость проводимостей $g_{дэ}$, $jb_{дэ}$ от частоты для случая $\theta_{пр} = 10$.

Характер функций существенно зависит от соотношения между собст-

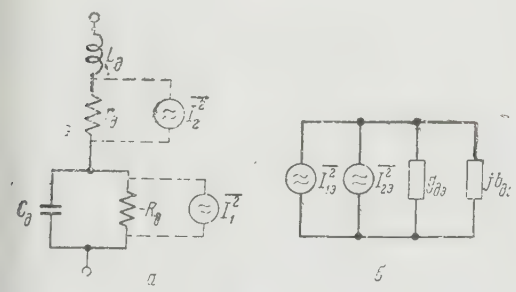


Рис. 1

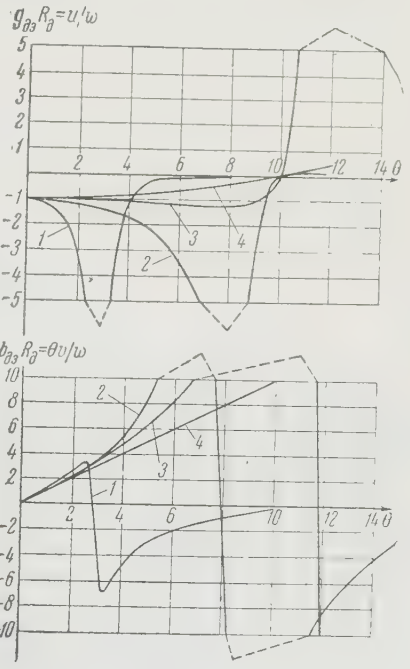


Рис. 2

Рис. 1

а — эквивалентная схема туннельного диода; *б* — эквивалентная параллельная схема

2. Зависимость активной и реактивной составляющих сопротивления туннельного диода от рабочей частоты ($\theta_{пр} = 10$):

1 — $\theta_д = 3$; *2* — $\theta_д = 8$; *3* — $\theta_д = 12$; *4* — $\theta_д = \infty$

венной резонансной частотой $\theta_д$ и предельной частотой $\theta_{пр}$. При приближении к резонансной частоте абсолютная величина активной проводимости возрастает, а реактивная проводимость сначала возрастает, а потом уменьшается и меняет знак.

По соображениям, связанным с обеспечением устойчивости усилителя, при изготовлении туннельных диодов стремятся уменьшить индуктивность вводов настолько, чтобы выполнялось неравенство $\theta_д > \theta_{пр}$.

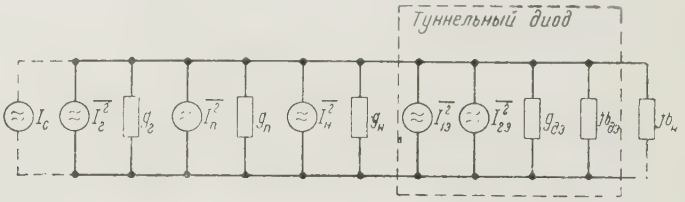


Рис. 3. Эквивалентная схема резонансного усилителя на туннельном диоде

На рис. 3 показана эквивалентная схема резонансного усилителя на туннельном диоде, на которой $g_н$ — активная проводимость нагрузки; $g_г$ — активная проводимость источника $I_г$ усиливаемого сигнала; $jb_п$ — реактивная проводимость контура, присоединяемого к туннельному диоду, которая на рабочей частоте настраивается в резонанс с реактивной проводимостью диода,

$$b_{дэ} + b_п = 0 \quad \text{при} \quad \omega = \omega_0. \tag{16}$$

Активные потери в контуре отображаются проводимостью $g_п$, которую удобно выразить через отношение η «нагруженной» $Q_н$ и «ненагруженной» Q_0 добротностей резонансного контура:

$$\eta = \frac{Q_н}{Q_0} = \frac{g_п}{g_г + g_н + g_п}; \qquad g_п = \frac{\eta}{1-\eta}(g_г + g_н). \tag{17}$$

Генераторы шумового тока $I_г$, $I_н$, $I_п$ отображают тепловые шумы активных сопротивлений:

$$\overline{I_г^2} = 4kT_г \Delta f g_г, \tag{18}$$

$$\overline{I_н^2} = 4kT_н \Delta f g_н, \tag{19}$$

$$\overline{I_п^2} = 4kT \Delta f g_п. \tag{20}$$

Пользуясь схемой, приведенной на рис. 3, можно рассчитать основные характеристики резонансного усилителя: коэффициент усиления, полосу пропускания, коэффициент шума.

Определим коэффициент усиления (применительно к условиям измерения этого параметра) как корень квадратный из отношения мощности $P_н$, выделяющейся на проводимости нагрузки, к максимальной мощности источника сигнала $P_п = I_c^2/4g_г$. Используя (17) и (3), находим

$$K_0 = \frac{2\sqrt{g_г g_н}}{g_г + g_н g_п + g_{дэ}} = \frac{2\sqrt{s}}{\frac{1+s}{1-\eta} - \frac{1}{R_д g_г}\frac{u(\theta)}{w(\theta)}}, \tag{21}$$

где параметр

$$s = \frac{g_н}{g_г} \tag{22}$$

характеризует связь с нагрузкой. Заметим, что $K_0 \to 0$ при $s \to 0$ и $s \to \infty$.

В дальнейших расчетах мы будем считать величину K_0 заданной, что отвечает обычным условиям проектирования малошумящего усилительного каскада.

Для расчета полосы пропускания

$$2\Delta f = \frac{\omega_0}{2\pi Q}, \tag{23}$$

где Q — добротность в рабочем режиме («регенерированная» добротность), используем следующее общее соотношение [4]:

$$Q = \frac{1}{2}\omega_0 b'_\Sigma(\omega_0)\frac{1}{g_\Sigma}, \tag{24}$$

где $b'_\Sigma(\omega_0)$ — производная по ω от суммарной реактивной проводимости контура,

$$b_\Sigma = b_{\text{дэ}} + b_{\text{н}}$$

на резонансной частоте ω_0;

$$g_\Sigma = g_{\text{г}} + g_{\text{н}} + g_{\text{и}} + g_{\text{дэ}}$$

— суммарная активная проводимость.

Формула (24) справедлива в случае, если в пределах полосы пропускания производная $b'_\Sigma(\omega)$ примерно постоянна. Это условие всегда выполняется для контуров с «одногорбой» резонансной характеристикой, которые в дальнейшем мы и подразумеваем.

Используя (24), можно получить следующую формулу для полосы пропускания:

$$2\Delta f = \frac{1-\xi}{2\pi\tau_{\text{д}}K_0}\frac{2}{\sqrt{s}+\sqrt{1/s}}\frac{2}{1+p}\frac{1}{\frac{1}{1-\eta}-\frac{2}{K_0(\sqrt{s}+\sqrt{1/s})}}\Pi(\theta), \tag{25}$$

где обозначено:

$$\Pi(\theta) = \frac{1-\left(\frac{\theta}{\theta_{\text{пр}}}\right)^2}{v(\theta)\left[1-\frac{2}{1+p}\psi(\theta)\right]}; \tag{26}$$

$$\psi(\theta) = \frac{\theta w'(\theta)}{2w(\theta)} - \frac{\theta v'(\theta)}{2v(\theta)} = \frac{\frac{\theta^2}{\theta_{\text{д}}^2}}{1-\frac{1}{\theta_{\text{д}}^2}-\frac{\theta^2}{\theta_{\text{д}}^2}} + \frac{\theta^2\left(\xi-\frac{1}{\theta_{\text{д}}^2}\right)^2 - 2\frac{\theta^2}{\theta_{\text{д}}^2}\left(1-\xi-\frac{\theta^2}{\theta_{\text{д}}^2}\right)}{\theta^2\left(\xi-\frac{1}{\theta_{\text{д}}^2}\right)^2+\left(1-\xi-\frac{\theta^2}{\theta_{\text{д}}^2}\right)}; \tag{27}$$

$$p = \frac{\omega_0 b'_{\text{н}}(\omega_0)}{b_{\text{н}}(\omega_0)}. \tag{28}$$

Заметим, что параметр p характеризует степень распределенности контура. Если контур образован сосредоточенной индуктивностью, то $p = 1$. Для контура, образованного короткозамкнутым отрезком длинной линии, $p > 1$ и составляет

$$p = \frac{2n\pi}{\sin 2\alpha_0} + \frac{2\alpha_0}{\sin 2\alpha_0}, \tag{29}$$

где n — число целых полуволн, укладывающихся на длине контура; α_0 — «электрическая» длина отрезка линии, определяемая из условия

резонанса с емкостной проводимостью туннельного диода:

$$b_{\text{дэ}} - \frac{1}{Z_0}\operatorname{ctg}\alpha_0 = 0, \qquad \alpha_0 = \operatorname{arc\,tg}\frac{R_{\text{д}}}{Z_0}\frac{w(\theta)}{\theta v(\theta)}. \tag{30}$$

Здесь Z_0 — волновое сопротивление линии.

Формулы (25), (26) и (27) весьма сложны. Однако если учесть величины параметров, свойственные реальным диодам, то эти формулы можно существенно упростить. Так, при

$$\xi \ll 1, \qquad \frac{1}{\theta_{\text{д}}^2} \ll 1, \qquad \frac{\theta_{\text{пр}}}{\theta_{\text{д}}^2} \simeq \frac{L_{\text{д}}}{C_{\text{д}}R_{\text{д}}}\frac{1}{\sqrt{R_{\text{д}}r_{\text{д}}}} \ll 1 \tag{31}$$

функция $\Pi(\theta)$ ((26)) приобретает следующий вид:

$$\Pi(\theta) \simeq \frac{1-\left(\frac{\theta}{\theta_{\text{пр}}}\right)^2}{1-\left(\frac{\theta}{\theta_{\text{д}}}\right)^2\left(1-\frac{2}{1+p}\right)}. \tag{32}$$

Если внешний контур усилителя образован сосредоточенной индуктивностью, так что параметр распределенности $p = 1$, то

$$\Pi(\theta) = 1 - \left(\frac{\theta}{\theta_{\text{пр}}}\right)^2. \tag{33}$$

Во многих случаях собственная частота диода настолько высока, что выполняется более сильное, чем (31), неравенство

$$\left(\frac{\theta_{\text{пр}}}{\theta_{\text{д}}}\right)^2 \simeq \frac{L_{\text{д}}}{C_{\text{д}}R_{\text{д}}}\frac{1}{r_{\text{д}}} \ll 1. \tag{34}$$

Тогда $\Pi(\theta)$ выражается формулой (33) и при $p \neq 1$.

Обычно можно принять, что $K_0 \gg 1$ и, следовательно,

$$\frac{2}{K_0(\sqrt{s}+\sqrt{1/s})} \ll \frac{1}{1-\eta}. \tag{35}$$

Учитывая (31), (33), (35), формулу (25) заменяем более простой:

$$2\Delta f = \frac{1}{2\pi\tau_{\text{д}}K_0}\frac{2(1-\eta)}{(\sqrt{s}+\sqrt{1/s})}\frac{2}{1+p}\left[1-\left(\frac{\theta}{\theta_{\text{пр}}}\right)^2\right]. \tag{36}$$

Если предположить $p = s = 1$, $\eta = 0$, $(\theta/\theta_{\text{пр}})^2 \ll 1$, то, подставив эти значения в (36), получим широко известную формулу для приближенной оценки полосы пропускания усилителя:

$$2\Delta f = \frac{1}{2\pi\tau_{\text{д}}K_0}. \tag{37}$$

Сравнивая формулы (25), (36), (37), можно отметить следующее. Формула (37) является крайне приближенной и пригодна лишь для оценочного определения полосы пропускания при низких рабочих частотах. Формула (36) отражает существенное влияние целого ряда параметров усилителя, что необходимо учитывать при проектировании; в частности, показывается сужение полосы пропускания при приближении к предельной частоте, выявляется существенное влияние параметра распределенности p контура и параметра s связи с нагрузкой, а также учитывается влияние потерь в контуре. Естественно, что при увеличении потерь и сохранении заданного коэффициента усиления (по отношению к полезной нагрузке $g_{\text{н}}$ усилителя) полоса пропускания сужается. Формула (25) отличается от (36) главным образом тем, что учитывает влияние индуктивности диода.

Поскольку, однако, условие (34), и тем более (31), выполняется достаточно надежно, то формула (36) дает вполне удовлетворительный результат.

Используя схему рис. 3, нетрудно рассчитать коэффициент шума усилителя, который вследствие параллельного включения всех источников шума равен

$$F = 1 + \frac{\overline{I_{\text{н}}^2}}{\overline{I_{\text{г}}^2}} + \frac{\overline{I_{\text{п}}^2}}{\overline{I_{\text{г}}^2}} + \frac{\overline{I_{\text{э1}}^2}}{\overline{I_{\text{г}}^2}} + \frac{\overline{I_{\text{э2}}^2}}{\overline{I_{\text{г}}^2}}.$$

Производя преобразования, получим следующую точную формулу для расчета F:

$$F = 1 + \frac{T}{T_{\text{г}}}\frac{\eta}{1-\eta}(1+s) + \frac{T_{\text{н}}}{T_{\text{г}}}s + \\ + \frac{1+s}{1-\xi}\left[\frac{1}{1-\eta} - \frac{2}{K_0(\sqrt{s}+\sqrt{1/s})}\right]\frac{1}{1-\left(\frac{\theta}{\theta_{\text{пр}}}\right)^2}\left[\frac{eI_0}{2kT_{\text{г}}} + \xi(1+\theta^2)\right]. \quad (38)$$

Заметим, что коэффициент шума не зависит от собственной резонансной частоты $\theta_{\text{д}}$ диода (т. е. не зависит от индуктивности вводов).

Если $K_0 \gg 1$ и, кроме того, $T = T_{\text{н}} = T_{\text{г}} = T_0 = 293°\text{K}$, то из (38) получаем следующую формулу для относительной температуры $t_{\text{ш}}$ шума усилителя:

$$t_{\text{ш}} = F - 1 = \frac{\eta + s}{1-\eta} + \frac{1+s}{(1-\eta)(1-\xi)}\frac{1}{1-\left(\frac{\theta}{\theta_{\text{пр}}}\right)^2}[0{,}02I_0R_{\text{д}} + \xi(1+\theta)^2], \quad (39)$$

где I_0 — в миллиамперах, $R_{\text{д}}$ — в омах.

При $(\theta/\theta_{\text{пр}})^2 \ll 1$ $s = 1$, $\eta = \xi = 0$ из (39) получается приближенная формула

$$t_{\text{ш}} = 1 + 0{,}04I_0R_{\text{д}}, \quad (40)$$

которая подобно (37) применима лишь для ориентировочных оценок.

Как следует из (39), при приближении к предельной частоте относительная температура $t_{\text{ш}}$ шума неограниченно возрастает. Для уменьшения $t_{\text{ш}}$ следует стремиться к максимальному снижению относительных величин потерь ξ и η в диоде и контуре, а также ослаблять связь с нагрузкой (т. е. уменьшать s). Однако уменьшение s связано с сужением полосы пропускания (см. (36)), которая имеет максимум при $s = 1$. Поэтому при проектировании необходимо отыскивать оптимальное значение s применительно к определенному назначению усилителя. Если основным требованием является получение наиболее низкой температуры шума, то допустимо снижение s до 0,1—0,2, что сужает полосу пропускания на 30—40% относительно максимального значения (при сохранении заданного усиления), но зато дает выигрыш в величине $t_{\text{ш}}$ почти в два раза.

В заключение выражаю признательность В. Б. Штейншлейгеру за полезное обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. H. S. Sommers a. o t h., Tunnel-diode for low-noise amplification, IRE Wescon Convention Record, 1959, part 3, p. 3—9.
2. P. Panfield, Noise-performance of tunnel-diode amplifiers, Proc. I. R. E., 1960, 48, 8, 1478.
3. E. G. Nielson, Noise-performance of tunnel-diode, Proc. I. R. E., 1960, 48, 11, 1903.
4. С. И. Евтянов, Двухконтурные автогенераторы с линиями, Радиотехника, 1950, 5, 4, 17.

Поступила в редакцию
22 II 1961

О ТЕРМОЭЛЕКТРОННЫХ СВОЙСТВАХ ГЕКСАБОРИДОВ И ДРУГИХ СОЕДИНЕНИЙ ТИПА СТРУКТУР ВНЕДРЕНИЯ

В. А. Тригубенко, Б. М. Царев

Литературные данные по эмиссионной постоянной и работе выхода многих тугоплавких соединений типа структур внедрения показывают значительное расхождение результатов, полученных различными авторами.

Некоторые исследования, проведенные авторами статьи, в условиях вакуума порядка 10^{-7} — 10^{-6} *мм* рт. ст. свидетельствуют о возможности колебаний эмиссионных свойств в широких пределах в зависимости от режима работы катода. Одной из причин подобных изменений может быть загрязнение поверхности тугоплавких соединений пленками окислов входящих в них металлов.

Для получения надежных результатов необходимо проводить исследования термоэлектронной эмиссии подобных соединений в условиях более высокого вакуума и тщательной очистки их поверхности.

Возможность использования каких-либо веществ в качестве материалов для термоэлектронных катодов определяется двумя основными факторами: высокой термоэлектронной эмиссией и низкой скоростью их испарения при рабочей температуре. Уже из работы Лафферти [1] было видно, что эмиссия гексаборида лантана уступает лишь эмиссии оксидных катодов в области низких температур, а скорость его испарения оказывается наименьшей при заданном значении плотности тока эмиссии при сравнении с рядом других тугоплавких веществ (Zr, Mo, Nb, W, Ta, Th на W). Если же принять во внимание сильные связи между атомами бора в гексаборидах, обусловливающие высокие точки их плавления (>2100° С), их высокую химическую сопротивляемость воздействию кислорода, влаги и HCl, высокую механическую прочность и, как следствие, способность выдерживать большую напряженность электрического поля у катода, устойчивость по отношению к ионной бомбардировке, способность работать в условиях плохого вакуума (до 10^{-4} и даже 10^{-2} *мм* рт. ст.), то перспективность применения гексаборидных катодов не вызовет никаких сомнений, так как ни сравнительно высокая рабочая температура, ни реакция с материалом керна, предотвращаемая при помощи защитных прослоек из карбидов, диборидов или силицидов, не могут служить существенным препятствием для разработки катодов на основе гексаборидов.

Однако до сих пор в литературе нет необходимых и достаточно надежных данных для сравнительной оценки термоэлектронных свойств и скорости возгонки гексаборидов редкоземельных и щелочноземельных металлов. Из сводки эмиссионных свойств гексаборидов, приведенной в табл. 1, видны значительные расхождения результатов, полученных различными авторами, и наличие как чрезмерно низких, так и аномально высоких значений эмиссионной постоянной A по сравнению с ее теоретическим значением ($A_0 = 120{,}4$ $a/см^2 \cdot град^2$), что явно не соответствует металлоподобной природе гексаборидов, подтверждаемой многими их свойствами. Аналогичную картину можно видеть и в случае других соединений типа структур внедрения, как, например, диборидов, карбидов и т. п., примеры которых приведены в табл. 2.

Таблица 1

Термоэлектронные свойства гексаборидов

Вид гексаборидов	φ_0, *эв*	A, *а/см²·град²*	Источник данных	Вид гексаборидов	φ_0, *эв*	A, *а/см²·град²*	Источник данных
CaB_6	2,86	2,6	[1]	EuB_6	4,9	1000—5000	[8]
SrB_6	2,67	0,14	[1]	GdB_6	2,05	0,84	[5]
BaB_6	3,45	16,0	[1]	TbB_6	2,99	120,4 (?)	[8]
ScB_6	2,96	4,6	[8]	DyB_6	3,53	25,1	[5]
YB_6	2,2	15,0	[6]	HoB_6	3,42	13,9	[5]
LaB_6	2,66	29	[1]	ErB_6	3,37	9,9	[5]
LaB_6	2,68	73	[5]	YbB_6	3,13	2,5	[5]
CeB_6	2,59	3,6	[1]	LuB_6	3,0	0,36	[5]
CeB_6	2,93	~580	[5]	(ЦММ)B_6	2,64	14,0	[1]
PrB_6	3,46	~300	[5]	(ЦММ)B_6	2,89	~370	[7]
NdB_6	3,97	420	[5]	ThB_6	2,92	0,53	[4]
SmB_6	4,4	—	[8]				

Примечание: ЦММ — цермишметалл.

Таблица 2

Термоэлектронные свойства некоторых диборидов и карбидов

Вид вещества	φ_0, *эв*	A, *а/см²·град²*	Источник данных	Вид вещества	φ_0, *эв*	A, *а/см²·град²*	Источник данных
TiB_2	3,88	~884	[9]	ZrC	2,18	0,31	[11]
VB_2	3,95	35,5	[9]	UC	4,57	730000	[10]
CrB_2	3,36	48,0	[9]	UC	2,94	33	[3]
ZrB_2	3,67	0,5	[9]	$(ZrC)_{0,8}\cdot(UC)_{0,2}$	4,3	66000	[10]
ZrB_2	4,48	35000	[11]	ThC_2	3,2	~200	[12]
ZrC	3,8	134	[10]	ThC_2	3,5	~550	[11]

Аномально высокие значения постоянной A послужили даже поводом к появлению заметки [2], в которой автор пытался объяснить эти значения влиянием предполагаемых им весьма низких значений ширины запрещенной зоны или энергии активации в подобного рода соединениях. Однако недавно опубликованы новые значения эмиссионных постоянных карбида урана [3], а именно: $\varphi_0 = 2{,}94$ *эв* и $A = 33$ *а/см²·град²*, исключающие UC из списка веществ с большим значением A. В связи с этим представляют интерес некоторые результаты проведенных авторами этой статьи исследований термоэлектронной эмиссии гексаборидов некоторых редкоземельных металлов (La, Ce, Pr, Nd, Sm, Eu, Gd, Tb, Er, Y). Исследуемые гексабориды наносились на танталовую проволоку, предварительно покрытую спеченным слоем танталового порошка. Толщина слоев танталового и гексаборидного порошков строго контролировалась в узких пределах при помощи микроскопа МИМ-7. Испытание приготовленных таким образом катодов производилось в цилиндрических диодах с тройными анодами. Откачка диодов велась на установке с масляным диффузионным насосом и ловушкой с жидким азотом. Температура катодов во время их обработки на насосе и при измерениях в отпаянных диодах определялась микропирометром МОП-48. Степень вакуума во время отпайки диодов с насоса лежала в пределах 10^{-7}—10^{-6} *мм* рт. ст. После отпайки в диодах распылялся бариевый поглотитель. Определение работы выхода φ_0 и эмиссионной постоянной A производилось методом прямых Ричардсона по данным измерения плотности тока эмиссии j_s для ряда значений температуры в пределах от 900 до 1100° С. Подобные определения производились для каждого катода после ряда периодов его работы в течение определенного времени при постоянной температуре в пределах от 1130 до 1300° С (см. подпись к рис. 2).

Во время работы и испытаний температура катодов и тепловая нагрузка анодов были значительно ниже по сравнению с режимом их обработки на насосе, что исключало возможность сколь-либо существенного ухудшения вакуума в отпаянных приборах. Результаты определения φ_0 и A для всех этапов работы катода из TbB_6 приведены на рис. 1, откуда видно, что значения φ_0 и A, полученные в различные моменты работы катода, довольно хорошо укладываются в линейную зависимость $\lg A = f(\varphi_0)$, а совокупность значений, полученных для ряда катодов, укладывается в пределы некоторого эллипса рассеяния, большая ось которого может быть принята за выражение средней линейной зависимости $\lg A$ от φ_0 для испытанной партии катодов.

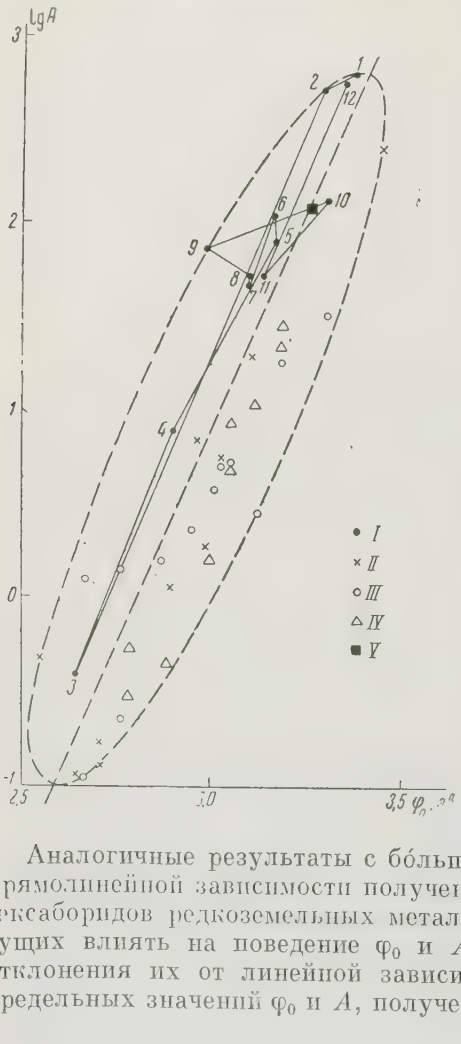


Рис. 1. Изменение работы выхода φ_0 и постоянной A в процессе работы катодов из TbB_6 по указанному ниже режиму:

катод № 1 (*I*) (цифрами отмечены этапы режима работы, после которых определялись значения φ_0 и A, а именно: *1*—5 *мин* при 1130 °С, *2*—15 *мин* при 1130 °С, *3*—30 *мин* при 1130 °С, *4*—60 *мин* при 1130 °С, *5*—120 *мин* при 1130 °С, *6*—120 *мин* при 1150 °С, *7*—120 *мин* при 1175 °С, *8*—120 *мин* при 1200 °С, *9*—120 *мин* при 1225 °С, *10*—120 *мин* при 1250 °С, *11*—120 *мин* при 1275 °С, *12*—120 *мин* при 1300 °С); катод № 2 (*II*);катод № 3 (*III*); катод № 4 (*IV*); *V*—среднее значение φ_T (при $A = 120{,}4$ *а/см²·град²*) для TbB_6, равное 3,26 *эв* (для $T = 1300$ °K)

Аналогичные результаты с бо́льшими или меньшими отклонениями от прямолинейной зависимости получены и для других исследованных нами гексаборидов редкоземельных металлов. Ввиду множества факторов, могущих влиять на поведение φ_0 и A, возможны, конечно, те или иные отклонения их от линейной зависимости. В табл. 3 приведена сводка предельных значений φ_0 и A, полученных нами для гексаборидов различ-

Таблица 3

Пределы изменения термоэлектронных постоянных гексаборидов в процессе работы по режиму, приведенному в подписи к рис. 1 (по данным для нескольких катодов, приготовленных из каждого вида борида)

Вид гексаборида	Пределы изменения работы выхода φ_0, *эв*	Пределы изменения эмиссионной постоянной A, *а/см²·град²*
LaB_6	1,62—3,02	$2 \cdot 10^{-4}$—312
CeB_6	2,4—5,3	$5 \cdot 10^{-2}$—$5 \cdot 10^{8}$
PrB_6	2,8—3,5	0,63—160
NdB_6	1,9—3,3	$5 \cdot 10^{-4}$—160
SmB_6	2,35—4,1	$6 \cdot 10^{-5}$—~1600
EuB_6	2,6—3,9	0,01—~100
GdB_6	1,7—3,8	$3 \cdot 10^{-6}$—~63
TbB_6	2,5—3,5	0,06—~630
ErB_6	2,4—4,1	$3 \cdot 10^{-4}$—~4000
YB_6	2,3—3,3	0,06—~160

Таблица 4

Сравнение значений работы выхода для гексаборидов и окислов редкоземельных металлов

Вид гексаборида	φ_T гексаборида (1700°K)	φ_T окисла (1700°K)	Вид окисла	Вид гексаборида	φ_T гексаборида (1700°K)	φ_T окисла (1700°K)	Вид окисла
LaB_6	2,86*, 2,87**	3,10	La_2O_3	EuB_6	4,35—4,6*	3,38	Eu_2O_3
CeB_6	3,30*	3,21	Ce_2O_3	GdB_6	2,78*	3,29	Gd_2O_3
PrB_6	3,35*	3,48	Pr_2O_3	TbB_6	3,26***	3,3	Tb_2O_3
NdB_6	3,31*	3,3	Nd_2O_3	ErB_6	3,74*	3,33	Er_2O_3
SmB_6	3,7*	3,21	Sm_2O_3	YB_6	2,52*	3,5	Y_2O_3

* Вычислено по данным табл. 1.
** Вычислено по уравнению $\varphi_T = 2{,}66 + 1{,}23 \cdot 10^{-4} T$ [18].
*** Определено по данным рис. 1 для $T = 1300$°K.

ных редкоземельных металлов в процессе работы катодов в режимах, аналогичных приведенному в подписи к рис. 1. Эти данные, полученные при давлении остаточных газов порядка 10^{-7}—10^{-6} *мм* рт. ст., свидетельствуют о существенном влиянии остаточных газов на поведение исследованных нами гексаборидов, так как подобная линейная зависимость $\lg A$ от φ_0 ранее отмечалась многими авторами главным образом для материалов, в различной степени загрязненных посторонними веществами. Так, например, Рейман ([4], стр. 113, рис. 18) отмечает линейную зависимость значений $\lg A$ и φ_0, полученных Дешманом и Эвансом, а также Кингдоном для торированного вольфрама при различной степени покрытия его поверхности торием. Эта зависимость отмечена также в работах [14] и [15] соответственно для вольфрама и платины на различных стадиях их очистки путем прокаливания до возможно более высоких значений температуры. Значения φ_0 и A, полученные Цвиккером [16] для циркония и гафния в различные моменты их очистки прокаливанием, также хорошо ложатся на прямые линии в полулогарифмическом масштабе: $\lg A = f(\varphi_0)$. Наконец, следует отметить теоретический вывод линейной зависимости A от φ_0 в работе [17], посвященной термоэлектронным свойствам пленочных катодов. Все перечисленные факты свидетельствуют о том, что как химически активные металлы (цирконий, гафний, вольфрам), и даже такой неактивный металл, как платина, так и многие соединения типа структур внедрения с активными металлическими компонентами (торий, уран, цирконий, редкоземельные элементы) обнаруживают чувствительность к воздействию кислорода, а возможно и других компонентов остаточных газов, при испытании их на термоэлектронную эмиссию, в условиях недостаточно высокого вакуума.

Следует отметить, что изменения работы выхода, сопровождаемые изменениями постоянной A, удовлетворяющими линейной зависимости $\lg A$ от φ_0, могут наблюдаться и при сохранении постоянной плотности тока эмиссии при некотором определенном значении температуры катода. В этом случае при более низких значениях T эмиссия будет падать с ростом φ_0, а при более высоких значениях T она будет увеличиваться с ростом φ_0, как это показано на рис. 2. Поэтому лишь исследование катода в достаточно широком диапазоне значений его температуры позволит обнаружить влияние остаточных газов и других факторов на его термоэлектронные свойства.

Помимо непосредственного воздействия остаточных газов на эмиссию соединений типа структур внедрения возможно влияние и ряда других факторов и в первую очередь изменения фазового состава этих соединений и реакции их с материалом подложки. Изменения фазового состава могут наблюдаться при недостаточной чистоте исследуемого соединения, как, например, в случае загрязнения гексаборидов тетра-, три- и диборидами того же металла, которые при длительной высокотемпературной

обработке могут постепенно превратиться в гексабориды, более устойчивые в условиях высокого вакуума. Реакция же с материалом подложки, как уже отмечалось в работе [1], приводит к более интенсивному выделению металлического компонента борида на поверхность катода и, как следствие этого, к образованию там более устойчивой пленки окислов металла под воздействием кислорода остаточных газов. Однако, по-видимому, даже в случае чистого однофазового состава исследуемого соединения и в отсутствие заметной реакции с подложкой следует ожидать наличия на поверхности гексаборидов пленки окислов присутствующего в них металла, диффундирующего на поверхность и окисляемого там кислородом остаточных газов. К сожалению, отсутствие необходимых данных по скорости диффузии металлов в гексаборидах и испарению их окислов

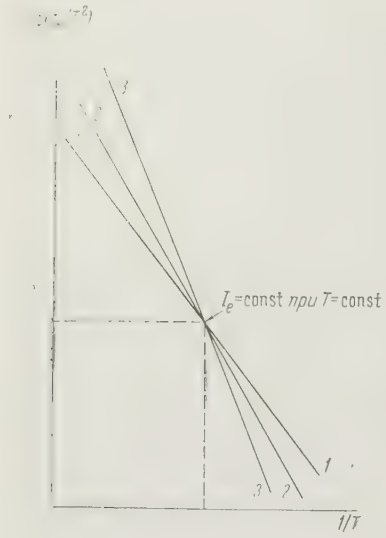


Рис. 2. Возможные положения прямых Ричардсона (следовательно, и изменения φ_0 и A при сохранении постоянной плотности тока эмиссии при T = const). Для прямых *1*, *2* и *3* имеет место соотношение $\varphi_{01} < \varphi_{02} < \varphi_{03}$

с поверхности не дает возможности установить какую-либо связь между поведением φ_0 и A для гексаборидов различных металлов и скоростью возгонки их окислов.

Для доказательства высказанной здесь мысли о возможности загрязнения гексаборидов и других соединений типа структур внедрения окислами присутствующих в них металлов приводим в табл. 4 сводку значений истинной работы выхода (φ_T при $A = 120{,}4$ *а/см²·град²*) для гексаборидов и окислов некоторых редкоземельных металлов, откуда видно сравнительно небольшое различие значений φ_T для боридов и окислов каждого из металлов. Кроме того, сравнение поведения эмиссионных постоянных φ_0 и A для гексаборидов различных редкоземельных металлов с данными по скорости испарения их окислов, опубликованными в работе [13], показывает, что высокие значения постоянной A наблюдаются, как правило, у гексаборидов металлов, окислы которых относительно летучи (Ce, Eu), и наоборот, в случае металлов с нелетучими окислами (Y, Gd, Dy, Ho, Er, Lu и Th) наблюдаются низкие значения постоянной A для их гексаборидов.

В силу всего сказанного выше надежные определения термоэлектронных свойств гексаборидов и других соединений типа структур внедрения, особенно с химически активными их металлическими компонентами, надо считать возможными лишь при соблюдении следующих условий: 1) проведения обработки катодов и их испытания в условиях ультравысокого вакуума (не хуже 10^{-8} *мм* рт. ст.); 2) использования для изготовления исследуемых катодов по возможности чистых веществ однофазового состава с контролем их при помощи рентгеноструктурного анализа до и после исследования на термоэлектронную эмиссию; 3) исключения возможности реакции вещества катода с металлом подложки, на которую оно наносится.

Ввиду неуверенности в том, будут ли удалены с поверхности катода окислы и другие загрязнения путем одной лишь высокотемпературной его обработки (испарения), желательно до измерения эмиссии проводить обработку поверхности катода ионной бомбардировкой в атмосфере тяжелых инертных газов (аргон, криптоно-ксеноновая смесь).

ЛИТЕРАТУРА

1. J. M. Lafferty, J. Appl. Phys., 1951, **22**, 3, 299.
2. E. A. Kmetko, Phys. Rev., 1959, **116**, 4, 895.
3. G. A. Haas, J. T. Jensen, J. Appl. Phys., 1960, **31**, 7, 1231.
4. А. Л. Рейман, Термоионная эмиссия, ГИТТЛ, 1940.
5. Г. А. Кудинцева, Б. М. Царев, Радиотехника и электроника, 1958, 3, 3, 428.
6. Г. А. Кудинцева, М. Д. Полякова, Г. В. Самсонов, Б. М. Царев, Физика металлов и металловедение, 1958, **6**, 2, 272.
7. Г. А. Кудинцева, В. А. Эппельбаум, Б. М. Царев, Бор, Тр. конференции по химии бора и его соединений, Госхимиздат, 1958, стр. 112—119.
8. Г. В. Самсонов, Л. Я. Марковский, А. Ф. Жигач, М. Г. Валяшко, Бор, его соединения и сплавы, Изд. АН УССР, 1960, стр. 432, табл. 107.
9. Г. А. Кудинцева, Б. М. Царев, В. А. Эппельбаум, Бор, Тр. конференции по химии бора и его соединений, Госхимиздат, 1958, стр. 106—111.
10. R. W. Pidd, G. M. Grover, D. J. Roehling, E. W. Salmi, J. D. Farr, N. H. Krikorian, W. G. Witteman, J. Appl. Phys., 1959, **30**, 10, 1575.
11. D. L. Goldwater, P. E. Haddad, J. Appl. Phys., 1951, 20, 1, 70.
12. Н. Д. Моргулис, Ю. П. Корчевой, Атомная энергия, 1960, 9, 1, 49.
13. Б. С. Кульварская, Р. С. Масловская, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 8, 1254.
14. I. Langmuir, Phys. Rev., 1913, 2, 450 (см. также А. Л. Рейман, Термоионная эмиссия, ГИТТЛ, 1940, стр. 153, рис. 34).
15. L. A. Du Bridge, Phys. Rev., 1928, 31, 236, 912 (см. также А. Л. Рейман, Термоионная эмиссия, ГИТТЛ, 1940, стр. 153, рис. 34).
16. C. Zwikker, Z. Phys., 1935, 30, 578.
17. A. Gehrts, Z. Phys., 1935, 36, 107—110; Z. f. techn. Phys., 1935, 16, 370—373.
18. V. L. Stout, Proc. 4th Nat. Conf. on Tube Techn., N. Y. Univ. Press, 1959, 178—179.

Поступила в редакцию
29 III 1961

1961 № 1

ОПТИМАЛЬНЫЕ РАБОЧИЕ ТОЧКИ НА ВОЛЬТАМПЕРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКЕ ТЕРМОЭЛЕКТРОННОГО ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЯ ЭНЕРГИИ

И. А. Резголь

Теоретически исследована вольтамперная характеристика вакуумного термоэлемента с компенсацией объемного заряда электронов. Выведены уравнения, определяющие связь между сопротивлением «согласованной» нагрузки и внутренним сопротивлением прибора в двух оптимальных режимах, соответствующих максимальной выходной электрической мощности и максимальному кпд преобразования тепловой энергии в электрическую. Приведена графическая интерпретация полученных результатов.

ВВЕДЕНИЕ

Основы теории вакуумного термоэлемента с компенсацией объемного заряда электронов разработаны Ансельмом [1], который вывел уравнения вольтамперных характеристик прибора, а также уравнения, определяющие тепловые процессы на электродах, полезную электрическую мощность, выделяемую на внешней нагрузке, и кпд преобразования тепловой энергии в электрическую. Известно, что при заданных материалах и постоянных температурах электродов, т. е. при постоянных значениях токов насыщения эмиссии эмиттера и коллектора, наиболее важные параметры преобразования, а именно, полезная электрическая мощность W и кпд η достигают своего максимума при определенных значениях внешнего нагрузочного сопротивления (при согласованной нагрузке). В ряде работ [2—5] приведен теоретический анализ «согласования по мощности», но он либо приводит к очень сложным зависимостям [4], либо содержит допущения, оправданные лишь в некоторых частных случаях [2, 3, 5]. Насколько нам известно, в литературе отсутствуют работы, в которых затрагивался бы вопрос «согласования по кпд»; между тем, этот вопрос представляет значительный интерес, так как параметры прибора в режиме максимального кпд могут сильно отличаться от параметров прибора в режиме максимальной мощности (особенно при относительно малой величине потерь тепла за счет лучеиспускания, как это показано ниже, с. стр. 1911—1912).

1. АНАЛИЗ ОПТИМАЛЬНЫХ РЕЖИМОВ РАБОТЫ ТЕРМОЭЛЕМЕНТА

Настоящая статья посвящена исследованию вопроса о положении оптимальных (по мощности и по кпд) рабочих точек на вольтамперной характеристике термоэлектронного преобразователя энергии, в котором объемный заряд электронов полностью скомпенсирован (практически такой преобразователь может быть осуществлен в виде диода, заполненного парами цезия низкого давления так, чтобы средняя длина свободного пробега электронов в газе значительно превышала расстояние между электродами; этот прибор, по терминологии Добрецова [4], является «вакуумным термоэлементом с компенсацией объемного заряда электронов»). Мы будем рассматривать идеализированный вакуумный термоэлемент, не учитывая при анализе омическое падение напряжения и джоулево тепло в вводах, неоднородность работы выхода по поверхности элект-

дов и влияние создаваемых генерируемым током магнитных полей на работу прибора. Такое упрощение позволяет получить физически ясные результаты анализа.

В ходе анализа индексом 1 мы будем обозначать горячий электрод (эмиттер), индексом 2 — холодный электрод (коллектор). Фиксированными параметрами будут являться работы выхода φ_1 и φ_2, температуры электродов T_1 и T_2, а следовательно, и токи насыщения эмиссии эмиттера и коллектора I_{1s} и I_{2s}.

Цель настоящего исследования заключается в нахождении условий максимума в уравнениях

$$W = IV, \tag{1}$$

$$\eta = \frac{W}{Q_1}, \tag{2}$$

определяющих мощность, выделяемую на внешней нагрузке, и кпд преобразования тепловой энергии в электрическую. Здесь I — ток, генерируемый в термоэлементе; V — напряжение на внешней нагрузке; Q_1 — тепловая мощность, подводимая к эмиттеру от источника тепла.

Максимум в уравнении (1) определяется тривиальным соотношением

$$-\frac{dV}{dI} = \frac{V}{I} = r, \tag{3}$$

где r — сопротивление внешней нагрузки.

Так как мы пренебрегли омическим падением напряжения в вводах, то разность потенциалов U между эмиттером и коллектором равна напряжению на внешней нагрузке, взятому с обратным знаком: $U = -V$. Это означает, что для рассматриваемого нами идеализированного термоэлемента внешняя и внутренняя вольтамперные характеристики являются зеркальными отображениями одна другой.

Внутреннее сопротивление термоэлемента по определению будет равно

$$R = \frac{dU}{dI} = -\frac{dV}{dI}. \tag{4}$$

Из уравнений (3) и (4) следует, что на внешней нагрузке выделяется максимальная мощность, если сопротивление нагрузки равняется внутреннему сопротивлению термоэлемента, т. е.

$$\frac{r}{R} = 1. \tag{5}$$

Полученное соотношение аналогично известному правилу о согласованной нагрузке, однако следует помнить, что в данном случае термин «внутреннее сопротивление» имеет до некоторой степени формальное значение, так как нельзя говорить о каком-либо «падении» напряжения внутри преобразователя ($U<0$).

Перейдем к анализу режима максимального кпд. Для этого предварительно рассмотрим конкретные выражения, определяющие величину Q_1, стоящую в знаменателе уравнения (2). Как известно [1], вольтамперная характеристика вакуумного термоэлемента в общем случае имеет две области: при $V<\varphi_1-\varphi_2$ между эмиттером и коллектором существует поле, ускоряющее электроны (область A); при $V>\varphi_1-\varphi_2$ между эмиттером и коллектором существует поле, тормозящее электроны (область B).

Сначала рассмотрим область B вольтамперной характеристики. Здесь удобно представить величину Q_1 как сумму полезной электрической мощности W и тепловой мощности Q_2, отводимой от коллектора: $Q_1 = W +$

$+ Q_2$. Величина Q_2 равна:

$$Q_2 = I_1\left(\varphi_2 + \frac{2kT_1}{e}\right) - I_2\left(\varphi_2 + \frac{2kT_2}{e}\right) + \Phi, \tag{6}$$

где k — постоянная Больцмана; e — заряд электрона; I_1 — ток электронов, идущий от эмиттера к коллектору; $I_2 = I_{2s}$ — обратный ток, идущий от коллектора к эмиттеру; Φ — тепло, переносимое с эмиттера на коллектор за счет лучеиспускания (вообще говоря, этот член может включать в себя все тепловые потери, не связанные с эмиттированными электронами: например, потери за счет теплопроводности газа, заполняющего межэлектродное пространство, за счет теплопроводности эмиттерного вывода и т. п.). Уравнение (6) можно записать в более удобном виде:

$$Q_2 = I\left(\varphi_2 + \frac{2kT_1}{e}\right) + Q_{OБ}, \tag{7}$$

где $Q_{OБ} = I_{2s}\frac{2k}{e}(T_1 - T_2) + \Phi$ — тепло, переносимое с эмиттера на коллектор в режиме разомкнутой цепи, когда $I = 0$. В дальнейшем нам придется пользоваться и другой формой уравнения (7):

$$\varkappa_2 = I + \varkappa_{OБ}, \tag{7a}$$

где

$$\varkappa_2 = \frac{Q_2}{\varphi_2 + \frac{2kT_1}{e}}; \quad \varkappa_{OБ} = \frac{Q_{OБ}}{\varphi_2 + \frac{2kT_1}{e}}.$$

Продифференцировав уравнение (7) по току, находим

$$\frac{dQ_2}{dI} = \varphi_2 + \frac{2kT_1}{e} = \frac{Q_2 - Q_{OБ}}{I}. \tag{8}$$

Далее определим максимум в уравнении (2), для чего надо производную $d\eta/dI$ приравнять нулю. Воспользовавшись при этом уравнением (8), получим следующее условие для режима максимального кпд преобразования в области $Б$ вольтамперной характеристики:

$$\frac{r}{R} = \frac{Q_2}{Q_{OБ}}. \tag{9}$$

Физически это означает, что в режиме максимального кпд отношение сопротивления нагрузки к внутреннему сопротивлению термоэлемента равняется отношению тепла, отводимого от коллектора в режиме максимального кпд, к теплу, переносимому через прибор в режиме разомкнутой цепи.

Обратимся теперь к области $А$ вольтамперной характеристики. Здесь имеем

$$Q_1 = I_{1s}\left(\varphi_1 + \frac{2kT_1}{e}\right) - I_2\left(\varphi_1 + \frac{2kT_2}{e}\right) + \Phi \tag{10}$$

или

$$Q_1 = I\left(\varphi_1 + \frac{2kT_2}{e}\right) + Q_{OA}. \tag{11}$$

В этом случае величина $Q_{OA} = I_{1s}\frac{2k}{e}(T_1 - T_2) + \Phi$ имеет физический смысл тепла, переносимого с эмиттера на коллектор в режиме разомкнутой цепи, лишь при $I_{1s} \leqslant I_{2s}$. Если $I_{1s} > I_{2s}$, то режим разомкнутой

цепи лежит в области *Б* характеристики, и тогда Q_{OA} надо считать просто удобным аналитическим выражением, не имеющим прямого физического смысла.

Другой формой уравнения (11) будет

$$\varkappa_1 = I + \varkappa_{OA}, \tag{11a}$$

где

$$\varkappa_1 = \frac{Q_1}{\varphi_1 - \frac{2kT_2}{e}}; \qquad \varkappa_{OA} = \frac{Q_{OA}}{\varphi_1 - \frac{2kT_2}{e}}.$$

Далее при помощи выражения

$$\frac{dQ_1}{dI} = \varphi_1 + \frac{2kT_2}{e} = \frac{Q_1 - Q_{OA}}{I} \tag{12}$$

определяем максимум в уравнении (2) и получаем условие для режима максимального кпд в области *А* вольтамперной характеристики:

$$\frac{r}{R} = \frac{Q_1}{Q_{OA}}. \tag{13}$$

Иначе говоря, в режиме максимального кпд для области *А* отношение сопротивления нагрузки к внутреннему сопротивлению термоэлемента равняется отношению тепла, подводимого к эмиттеру в режиме максимального кпд, к теплу, переносимому через прибор в режиме разомкнутой цепи (или просто к величине Q_{OA} при $I_{1s} > I_{2s}$).

Уравнения (9) и (13) можно объединить, представив условие максимального кпд в виде

$$\frac{r}{R} = \frac{Q_n}{Q_{OA,Б}}. \tag{14}$$

Здесь и в дальнейшем изложении индексом n будем обозначать тот электрод, с поверхностью которого совпадает минимум потенциала в термоэлементе: для области *А* таким электродом является эмиттер, для области *Б* — коллектор. Другой электрод, поверхность которого имеет положительный потенциал, будем обозначать индексом p.

Чтобы привести уравнения (5) и (14), определяющие оптимальные режимы работы термоэлемента, к более удобному виду, надо найти, чему равно отношение r/R.

В области *Б* ток, генерируемый в термоэлементе, описывается выражением

$$I = I_1 - I_{2s} = I_{1s} \exp\left\{\frac{e[(\varphi_1 - \varphi_2) - V]}{kT_1}\right\} - I_{2s}. \tag{15}$$

Отсюда

$$R = -\frac{dV}{dI} = \frac{1}{I_1}\frac{kT_1}{e}. \tag{16}$$

Введем обозначения: $V_1 = I_1 r$ и $V_2 = I_2 r$ (при этом $V = V_1 - V_2$). Тогда для области *Б* получим

$$\frac{r}{R} = \frac{eV_1}{kT_1}. \tag{17}$$

В области *А* ток равен

$$I = I_{1s} - I_2 = I_{1s} - I_{2s} \exp\left\{-\frac{e[(\varphi_1 - \varphi_2) - V]}{kT_2}\right\}. \tag{18}$$

Внутреннее сопротивление термоэлемента в области *А* равно

$$R = -\frac{dV}{dI} = \frac{1}{I_2}\frac{kT_2}{e}, \tag{19}$$

и, следовательно,

$$\frac{r}{R} = \frac{eV_2}{kT_2}. \tag{20}$$

Подставляя (17) и (20) в (5) и (14), получаем условия максимальной полезной мощности:

для области *Б*

$$\frac{eV_1}{kT_1} = 1, \tag{21}$$

для области *А*

$$\frac{eV_2}{kT_2} = 1 \tag{22}$$

или в общем виде

$$\frac{eI_p r}{kT_p} = 1 \tag{23}$$

и условия максимального кпд преобразования:

для области *Б*

$$\frac{eV_1}{kT_1} = \frac{Q_2}{Q_{OБ}}, \tag{24}$$

для области *А*

$$\frac{eV_2}{kT_2} = \frac{Q_1}{Q_{OA}}, \tag{25}$$

или в общем виде

$$\frac{eI_p r}{kT_p} = \frac{Q_n}{Q_{OA,Б}} = \frac{\varkappa_n}{\varkappa_{OA,Б}}. \tag{26}$$

Отметим, что если в области *Б* пренебречь током обратной эмиссии коллектора (принять $I_{2s} = 0$), то уравнение (21) совпадает с соотношением, полученным Моссом [2]:

$$V = \frac{kT_1}{e}, \tag{27}$$

а уравнение (24) принимает вид

$$V = \frac{kT_1}{e}\frac{Q_2}{\Phi}. \tag{28}$$

2. ГРАФИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ АНАЛИЗА

Как легко видеть, уравнения (23) и (26), определяющие оптимальные режимы работы термоэлемента, трансцендентны по отношению к любому из параметров I и V, фиксирующих положение рабочей точки на внешней вольтамперной характеристике прибора. В эти уравнения входят переменные величины r, I_p и Q_n ($\varkappa_n$), каждой из которых можно дать наглядное геометрическое истолкование на графике $I = f(V)$.

1. Сопротивление внешней нагрузки r численно равно контангенсу угла наклона линии нагрузки к оси абсцисс («линией нагрузки» будем называть прямую, проходящую через рабочую точку и через начало координат O вольтамперной характеристики).

2. Ток I_p, согласно уравнениям (15) и (18), описывается выражением $+I_p = I + I_{ns}$, где знак плюс относится к области *Б*, а знак минус — к области *А*. Следовательно, сдвинув ось абсцисс вниз (для области *Б*) или вверх (для области *А*) на величину I_{ns}, мы преобразуем график $I = f(V)$ в график $I_p = f(V)$ с началом координат в точке O'. При этом для области *А* кривая характеристики оказывается расположенной ниже новой оси абсцисс (оси XX), так как ток $I_2 = I_p$ и ток I противоположны по направлению.

3. Величина $\varkappa_n$, согласно уравнениям (7а) и (11а), линейно зависит от тока I. Следовательно, проведя горизонтальную ось YY на расстоянии $\varkappa_{OA,\,B}$ ниже оси абсцисс, мы из графика $I = f(V)$ получим график $\varkappa_n = f(V)$ с началом координат в точке O''.

Отмеченные выше геометрические соотношения позволяют дать полученным в результате анализа уравнениям (23) и (26) наглядную и несложную графическую интерпретацию на конкретных вольтамперных характеристиках термоэлемента. Для простоты рассмотрим случаи, когда обе оптимальные рабочие точки лежат либо в области B (рис. 1), либо в области A (рис. 2).

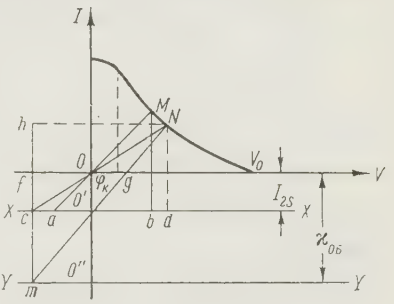


Рис. 1

Режим максимальной полезной мощности, соответствующий уравнению (23), графически изображается следующим образом: проведенные через оптимальную рабочую точку M линия нагрузки Ma и прямая Mb, параллельная оси ординат, отсекают на оси XX отрезок $ab = kT_p/e$ (так как $Mb = I_p$, $\operatorname{ctg} < Mab = r$ и $ab = I_p r$).

Режим максимального кпд преобразования, соответствующий уравнению (26), получает следующую графическую интерпретацию: проведенная через оптимальную рабочую точку N линия нагрузки Nc пересекает ось XX в точке c, через которую проводится прямая hm, параллельная оси ординат; точка m пересечения последней прямой с осью YY соединяется прямой с рабочей точкой N; прямые hm и Nm отсекают на оси абсцисс отрезок $fg = kT_p/e$ (это следует из того, что $fm = \varkappa_{OA,\,B}$, $hm = \varkappa_n$ и $hN = cd = I_p r$).

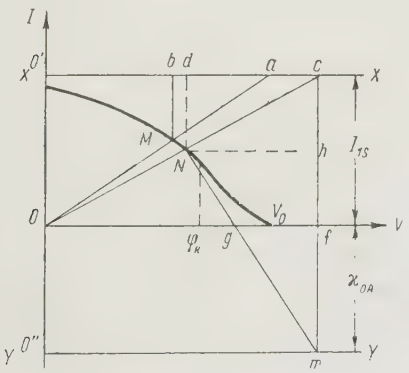


Рис. 2

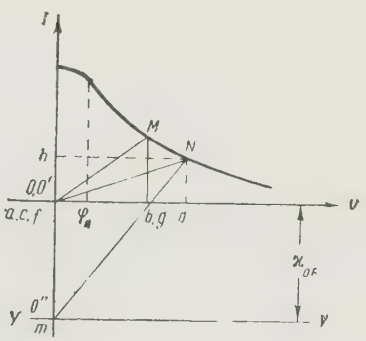


Рис. 3

На рис. 3 изображен график для упрощенного случая, соответствующего уравнениям (27) и (28), когда ток обратной эмиссии коллектора пренебрежимо мал ($I_{2s} \approx 0$) и обе оптимальные рабочие точки лежат в области B. Здесь, в отличие от графика, изображенного на рис. 1, ось XX «сливается» с исходной осью абсцисс и, следовательно, при указанных выше графических построениях точки O', a, c и f совмещаются с точкой O, точка m совмещается с точкой O'', и точка g совмещается с точкой b.

Рис. 1—3 наглядно показывают взаимное расположение двух оптимальных рабочих точек. Во-первых, точка N, соответствующая максимальному кпд, лежит правее (т. е. в области более высоких значений напряжения на внешней нагрузке), чем точка M, соответствующая максимальной полезной мощности. Во-вторых, эти точки тем дальше лежат друг от

друга, чем меньше величина Q_0, представляющая собой тепло, переносимое с эмиттера на коллектор в режиме разомкнутой цепи (напомним, что основную часть этой величины составляет перенос тепла за счет лучеиспускания).

Следует указать на возможный метод графического решения уравнений (21) — (28) при помощи построений, приведенных на рис. 1—3. Для решения можно использовать универсальный график в безразмерных координатах, что устраняет необходимость строить конкретные характеристики для каждого частного случая. Отметим, что в анализах [4] и [5], где по существу отыскивалась рабочая точка, соответствующая уравнению (22), даны довольно сложные и не обладающие наглядностью пути решения задачи, либо связанные с введением специальных табличных функций [4], либо недостаточно строгие вследствие пренебрежения некоторыми малыми величинами [4, 5]. Графический метод решения более прост, однако мы не будем на нем подробно останавливаться, так как он вряд ли может служить основой для инженерных расчетов термоэлектронного преобразователя энергии (ввиду того, что теоретическая модель вакуумного термоэлемента весьма идеализирована).

3. ГРАНИЦЫ ПРИМЕНИМОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ АНАЛИЗА

Оптимальные рабочие точки могут находиться на вольтамперной характеристике как в области $Б$, так и в области $А$ (см. рис. 1 и 2). Поэтому в каждом частном случае надо решать вопрос, в какой именно области лежит интересующая нас оптимальная рабочая точка. Критической точкой будет служить граница двух областей: $V = \varphi_k = \varphi_1 - \varphi_2$. Нетрудно показать, что оптимальные рабочие точки находятся в области $Б$, если соблюдаются следующие условия:

для максимальной полезной мощности

$$\frac{e(\varphi_1 - \varphi_2)}{kT_1} \frac{I_{1s}}{I_{1s} - I_{2s}} \leqslant 1, \tag{29}$$

для максимального кпд преобразования

$$\frac{e(\varphi_1 - \varphi_2)}{kT_1} \frac{I_{1s}}{I_{1s} - I_{2s}} \leqslant \frac{(I_{1s} - I_{2s})\left(\varphi_2 + \frac{2kT_1}{e}\right)}{I_{2s}\frac{2k}{e}(T_1 - T_2) + \Phi} + 1 \tag{30}$$

или эти точки находятся в области $А$ при соблюдении условий:

для максимальной полезной мощности

$$\frac{e(\varphi_1 - \varphi_2)}{kT_2} \frac{I_{2s}}{I_{1s} - I_{2s}} \geqslant 1, \tag{31}$$

для максимального кпд преобразования

$$\frac{e(\varphi_1 - \varphi_2)}{kT_2} \frac{I_{2s}}{I_{1s} - I_{2s}} \geqslant \frac{(I_{1s} - I_{2s})\left(\varphi_1 + \frac{2kT_2}{e}\right)}{I_{1s}\frac{2k}{e}(T_1 - T_2) - \Phi} + 1. \tag{32}$$

Неравенства (29) и (31) указывают, в какой области находится режим максимальной полезной мощности, а неравенства (30) и (32) — режим максимального кпд преобразования. Однако может встретиться и такой случай, когда не удовлетворяются оба неравенства. Тогда полученные нами уравнения уже нельзя применять, так как их корни не соответствуют реальной вольтамперной характеристике, и оптимальная рабочая точка находится на границе раздела областей $А$ и $Б$, т. е. напряжение на

согласованной нагрузке в этом случае в точности равно контактной разности потенциалов между электродами. Отметим также, что если не удовлетворяются одновременно все четыре неравенства (29) — (32), то этот случай является единственным, когда одна и та же рабочая точка ($V = \varphi_k = \varphi_1 - \varphi_2$) соответствует одновременно и максимальной полезной мощности и максимальному кпд преобразования.

Автор выражает благодарность Л. Н. Добрецову за ряд ценных советов, а также Н. И. Ионову и Т. Л. Мацкевич за полезные дискуссии.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. И. Ансельм, Термоэлектронный вакуумный термоэлемент, Изд. АН СССР, 1951.
2. H. Moss, Brit. J. Electronics, 1957, **2**, 4, 305.
3. G. R. Feaster, J. Electronics and Control, 1958, **5**, 2, 142.
4. Л. Н. Добрецов, ЖТФ, 1960, **30**, 4, 365.
5. Н. И. Ионов, ЖТФ, 1960, **30**, 10, 1210.

Поступила в редакцию
15 II 1961

1961 № 11

ТОКОВОЕ УПРАВЛЕНИЕ ЗАЖИГАНИЕМ РАЗРЯДА В ДЕКАТРОНЕ

Ф. М. Яблонский

Исследовано токовое управление зажиганием газоразрядного промежутка в двухимпульсном декатроне при помощи вспомогательного разряда. Получены зависимости предразрядного тока на катод в статических условиях от тока вспомогательного разряда и потенциала катода по отношению к плазме. Исследована зависимость напряжения зажигания в динамических условиях от длительности и амплитуды управляющего импульса на втором подкатоде, скоростей нарастания анодного напряжения и спада напряжения на втором подкатоде.

В тиратронах с холодным катодом широко применяется токовое управление зажиганием, т. е. управление напряжением зажигания ($U_з$) основного промежутка регулированием величины тока вспомогательного разряда.

Работа декатрона также основана на понижении напряжения зажигания разряда, обусловленном протеканием тока в соседнем газоразрядном промежутке.

Управление зажиганием тиратрона производится при помощи вспомогательного разряда, проходящего между вспомогательным анодом *са* (пусковым электродом) и катодом *к* (рис. 1, *а*). В декатроне вспомогательный разряд происходит между вспомогательным катодом *вк* (подкатодом) и анодом *а* (рис. 1, *б*). Поэтому для создания вспомогательного разряда в декатроне используется отрицательный импульс напряжения, а в тиратроне — положительный импульс.

Величина напряжения зажигания $U_з$ в основном промежутке определяется током ($I_к$), идущим на катод перед зажиганием разряда. В тиратроне этот ток непосредственно равен току вспомогательного разряда. При горении вспомогательного разряда на подкатод в декатроне потенциал катода выше потенциала подкатода (обычно на 40—60 *в*). Поэтому только часть тока вспомогательного разряда ответвляется на катод. Для определения величины $I_к$ в декатроне можно в первом приближении рассматривать катод как отрицательно заряженный электрод — «зонд», помещенный в плазму основного разряда, проходящего на подкатод. Ток на такой зонд зависит от геометрии электродов, тока разряда на подкатод и потенциала плазмы по отношению к зонду.

В тиратроне в отсутствие сопротивления в цепи катода ток вспомогательного разряда не влияет на напряжение между основными электродами. Наоборот, в декатроне ток вспомогательного разряда, протекая через $R_д$, понижает напряжение анод — катод до величины, меньшей напряжения горения (вследствие отрицательного по отношению к катоду напряжения на подкатоде и постоянства напряжения горения тлеющего разряда). Зажигание разряда на катод декатрона становится возможным лишь при повышении анодного напряжения после погасания разряда на подкатод.

В настоящей работе исследовано токовое управление зажиганием в двухимпульсном декатроне с гелиево-водородным наполнением при переносе разряда со второго подкатода на катод. Аналогичным образом

ожет быть рассмотрено токовое управление зажиганием в декатроне при ереносе разряда с катода на первый подкатод и с первого подкатода на торой подкатод.

Статические характеристики зависимости $I_к$ от напряжения катод — второй подкатод ($U_{2пк}$) при поддерживаемом постоянном токе вспомогательного разряда ($I_{2пк}$) показаны на рис. 2 (кривые *2* и *4*). Как видно из этих кривых, повышение $U_{2пк}$ ведет к понижению $I_к$.

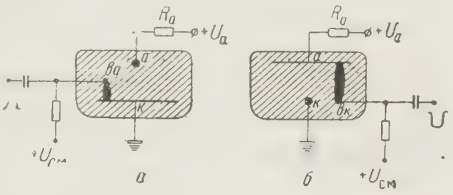


Рис. 1. Управление зажиганием разряда в тиратроне (*а*) и декатроне (*б*):
а — анод; *ва* — вспомогательный анод; к — катод; вк — вспомогательный катод (второй подкатод)

Потенциал катода-зонда по отношению к плазме ($U_{к\,пл}$) определяется соотношением $U_{к\,пл} = U_{пл} - U_{2\,пк}$ ($U_{пл}$ — потенциал плазмы по отношению к подкатоду). Так как $U_{пл} \simeq \Delta U_к$, где $\Delta U_к$ — катодное падение потенциала и в нормальном тлеющем разряде $\Delta U_к = \text{const}$, то приращение напряжения между катодом и подкатодом равно уменьшению напряжения катода по отношению к плазме. Таким образом, уменьшение тока на катод может объясняться уменьшением потенциала между катодом-зондом и плазмой.

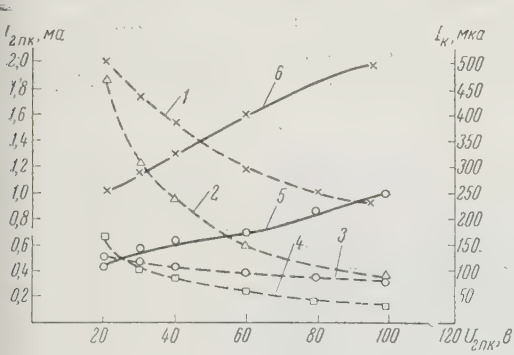


Рис. 2. Статические характеристики тока на катод-зонд в зависимости от напряжения между катодом и вторым подкатодом:
1 — $I_к = f(U_{2пк})$, $R_а = 120$ ком; *2* — $I_к = f(U_{2\,пк})$, $I_{2пк} = 1{,}0$ ма; *3* — $I_к = f(U_{2пк})$, $R_а = 240$ ком; *4* — $I_к = f(U_{2\,пк})$, $I_{2\,пк} = 0{,}5$ ма; *5* — $I_{2пк} = f(U_{2пк})$; $R_а = 240$ком; *6* — $I_{2\,пк} = f(U_{2\,пк})$, $R_а = 120$ ком

В реальной схеме включения декатрона анодное сопротивление ($R_а$) постоянно и изменение $U_{2пк}$ влияет не только на потенциал катода-зонда по отношению к плазме, но и на величину тока вспомогательного разряда.

Из рис. 2 видно, что характеристики $I_к = f(U_{2пк})$, снятые при постоянном $R_а$ (кривые *1* и *3*), спадают заметно медленнее, чем характеристики, снятые при постоянном $I_{2пк}$ (кривые *2* и *4*), что объясняется возрастанием $I_{2пк}$ при повышении $U_{2пк}$ (см. кривые *5* и *6*).

Упомянутое выше влияние тока вспомогательного разряда на напряжение на аноде декатрона не позволяет определять $U_з$ в статических условиях, так как для повышения анодного напряжения требуется уменьшить ток на второй подкатод. При медленном изменении $U_{2\,пк}$ это приводит к плавному выравниванию распределения токов между катодом и вторым подкатодом, не позволяющему четко определить момент зажигания разряда на катод.

При работе декатрона в пересчетной схеме напряжение на его подкатоды подается импульсами, вследствие чего рост напряжения на аноде до величины $U_з$ происходит значительно быстрее, чем меняется распре

деление токов между катодом и подкатодом. Вследствие этого величина $U_з$ имеет вполне определенное значение, которое может быть измерено при помощи осциллографа. Осциллограммы напряжения между анодом и катодом и тока в цепи второго подкатода показаны на рис. 3, а принципиальная схема измерений приведена на рис. 4. Напряжение на аноде декатрона измерялось осциллографом с малой входной емкостью. Для получения балансного входа, необходимого при осциллографировании тока второго подкатода, использовался импульсный трансформатор (*Тр1*). Цепь R_2C_1 была применена для компенсации паразитного выброса во вторичной обмотке трансформатора, обусловленного протеканием емкостного тока через сопротивление R_1.

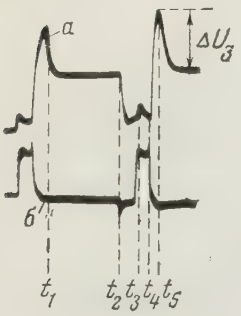


Рис. 3. Осциллограммы напряжений и токов в декатроне:

а — напряжение между анодом и катодом; *б* — ток на второй подкатод $I_{2пк}$; $\Delta U_з$ — разность напряжений зажигания и горения декатрона

Осциллограмма, изображенная на рис. 3, *а*, может быть объяснена следующим образом [1]. В период времени $t_1 - t_2$ горит разряд на катод; напряжение на аноде равно напряжению горения. В момент времени t_2 происходит перенос разряда на первый подкатод; потенциал анода падает вследствие того, что первый подкатод отрицателен по отношению к катоду. В момент времени t_3 происходит перенос разряда на второй подкатод. Так как второй подкатод во время подачи на него управляющего импульса также отрицателен по отношению к катоду, то потенциал анода продолжает оставаться меньше напряжения горения. В момент времени

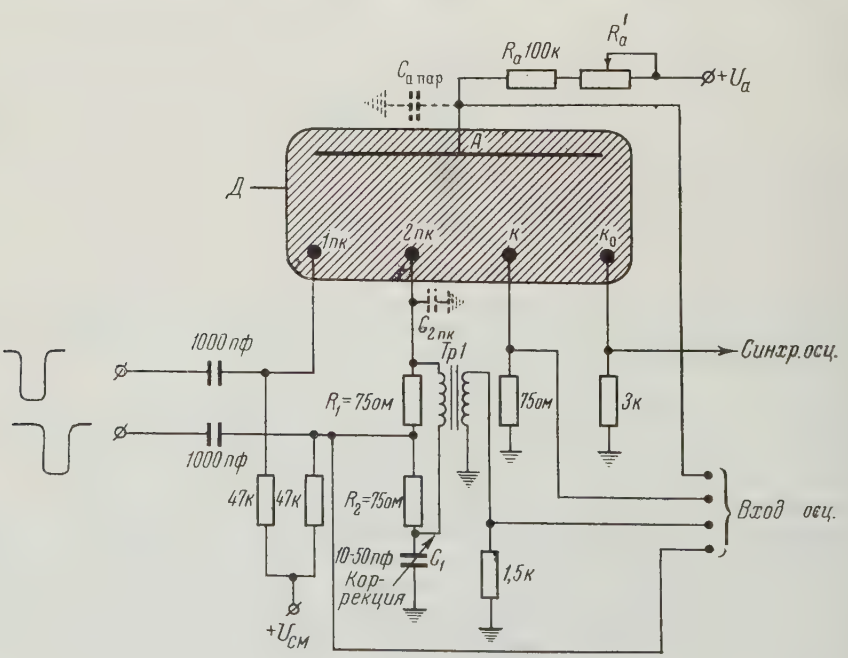


Рис. 4. Электрическая схема измерений напряжений и токов в декатроне:

Д — декатрон; $C_{а\,пар}$ — паразитная емкость на аноде декатрона; $C_{2пк}$ — паразитная емкость в цепи второго подкатода; 1пк — первый подкатод; 2 пк — второй подкатод; *к* — катод; $к_0$ — нулевой катод; *Тр1* — импульсный трансформатор

t_4 действие управляющего импульса на второй подкатод прекращается, что приводит к росту напряжения на аноде до величины $U_з$, равной напряжению зажигания разряда на следующий катод (момент времени t_5). Для удобства измерений при осциллографировании определялось превышение напряжения зажигания над напряжением горения ($\Delta U_з$).

Из осциллограмм, изображенных на рис. 3, видно, что рост напряжения на аноде декатрона до напряжения зажигания $U_з$ опаздывает по отношению к моменту прекращения тока в цепи второго подкатода, вследствие чего между окончанием тока на второй подкатод и началом тока

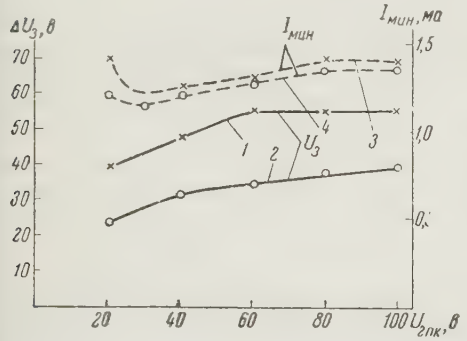


Рис. 5. Зависимость напряжения зажигания и минимального рабочего тока от амплитуды импульса на втором подкатоде:

1 — $U_з = f(U_{2пк})$, $\tau = 7$ *мксек*; *2* — $U_з = f(U_{2пк})$, $\tau = 10$ *мксек*; *3* — $I_{а\ мин} = f(U_{2пк})$, $\tau = 7$ *мксек*; *4* — $I_{а\ мин} = f(U_{2пк})$, $\tau = 10$ *мксек*

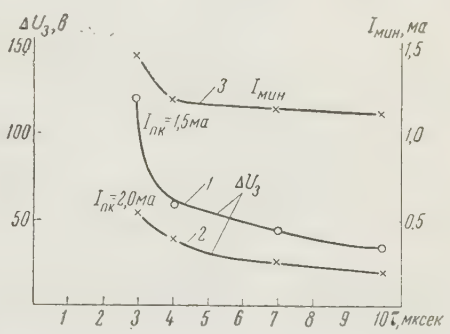


Рис. 6. Зависимость напряжения зажигания и минимального рабочего тока от длительности импульса на втором подкатоде:

1 — $U_з = f(\tau)$, $I_{2пк} = 1{,}5$ *ма*; *2* — $U_з = f(\tau)$, $I_{2пк} = 2{,}0$ *ма*, *3* — $I_{а\ мин} = f(\tau)$

на катод имеется заметный разрыв во времени. Такой характер осциллограмм обусловлен тем, что из-за малого внутреннего сопротивления источника управляющих импульсов изменение напряжения, определяющее изменение тока на второй подкатод, происходит с большой скоростью. Наоборот, повышение напряжения на аноде при уменьшении тока происходит с меньшей скоростью из-за наличия паразитной емкости на аноде ($C_{а\ пар}$), заряжаемой через высокоомные сопротивления $R_а$, $R'_а$. В результате в момент окончания второго импульса напряжение между анодом и вторым подкатодом становится меньше напряжения горения, и ток в цепи второго подкатода практически обрывается. Рост напряжения между анодом и катодом до величины, достаточной для зажигания разряда, происходит значительно медленнее, что и обусловливает запаздывание зажигания разряда на катод.

Таким образом, можно ожидать, что значение $U_з$ в динамических условиях будет определяться не только величинами $U_{2пк}$, $I_{2пк}$, но и скоростью нарастания анодного напряжения ($dU_а/dt$), зависящей от $R_а$, $R'_а$, $C_{а\ пар}$, скоростью спада напряжения на втором подкатоде ($dU_{2пк}/dt$), а также длительностью импульса тока на второй подкатод (τ).

На рис. 5 показаны зависимости величины $\Delta U_з$ от амплитуды импульса на втором подкатоде $U_{2\ пк}$ (измеренной по отношению к потенциалу катода), снятые при постоянном сопротивлении $R_а$ (кривые *1* и *2*). Из приведенных графиков видно, что увеличение $U_{2\ пк}$ приводит к росту $\Delta U_з$.

Зависимость величины $\Delta U_з$ от длительности управляющего импульса на втором подкатоде показана на рис. 6 (кривые *1* и *3*). Приведенные графики показывают, что с увеличением τ имеет место снижение $\Delta U_з$, особенно заметное при малых τ.

На рис. 7 приведены зависимости $\Delta U_з$ от скорости нарастания напряжения на аноде $dU_а/dt$ и скорости спада напряжения на втором подкатоде $dU_{2пк}/dt$. Изменение величин $dU_а/dt$ и $dU_{2пк}/dt$ производилось путем подключения различных емкостей к соответствующим электродам. Как видно из приведенных графиков, с повышением $dU_а/dt$ величина $\Delta U_з$ падает (кривая *1*), а с повышением $dU_{2пк}/dt$ $\Delta U_з$ возрастает (кривая *2*). Эти зависимости могут быть также проиллюстрированы осциллограм-

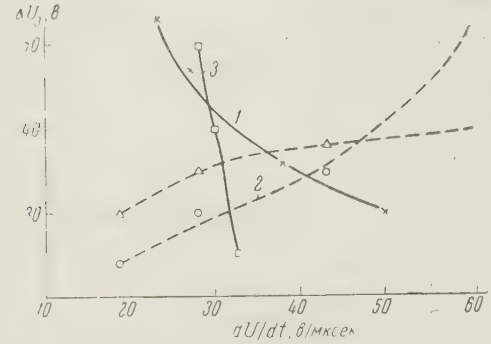


Рис. 7. Зависимость напряжения зажигания и минимального рабочего тока от скоростей нарастания напряжения на аноде $dU_а/dt$ и на втором подкатоде $dU_{2пк}/dt$:

$1 - U_з = f(dU_а/dt)$; $2 - U_з = f(dU_{2пк}/dt)$; $3 - I_{а\,мин} = f(dU_а/dt)$; $4 - I_{а\,мин} = f(dU_{2пк}/dt)$

мами рис. 8, показывающими временные соотношения между токами на второй подкатод и катод при различных величинах $C_а$ и $C_{2пк}$. Осциллограмма, изображенная на рис. 8, *а*, соответствует малой паразитной емкости в в цепи анода, т. е. большому значению $dU_а/dt$. При этом $\Delta U_з$ мало. Увеличение $C_а$ (рис. 8, *б*) вызывает понижение $dU_а/dt$ и повышение $\Delta U_з$. Понижение $dU_а/dt$ может быть в некоторой степени компенсировано увеличением $C_{2пк}$, понижающим $dU_{2пк}/dt$ и $\Delta U_з$ (рис. 8, *в*).

Связь между скоростями спада напряжения на втором подкатоде и скоростями нарастания напряжения на аноде показана на рис. 9. Кривая, изображенная на этом рисунке, состоит из двух частей: при $dU_{2пк}/dt < 28$ *в/мксек* величина $dU_а/dt$ возрастает с повышением $dU_{2пк}/dt$; при $dU_{2пк}/dt > 28$ *в/мксек* величина $dU_а/dt$ постоянна. Такой характер кривой позволяет сделать вывод, что при малом $dU_{2пк}/dt$ рост $dU_а/dt$ определяется скоростью спада тока на

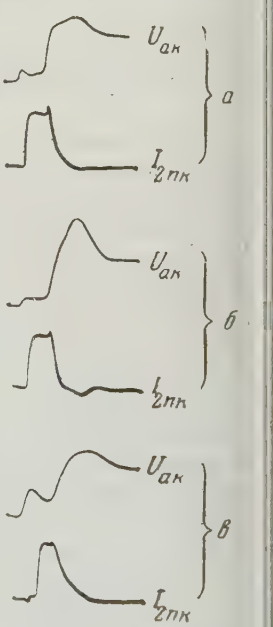


Рис. 8. Осциллограммы напряжения между анодом и катодом и тока на второй подкатод при различных емкостях в цепях анода и второго подкатода:

$а - C_а \sim 20$ *пф*, $C_{2пк} \sim 30$ *пф*; $б - C_а \sim 60$ *пф*, $C_{2пк} \sim 30$ *пф*; $в - C_а \sim 60$ *пф*, $C_{2\,пк} \sim 300$ *пф*

второй подкатод, а при большом $dU_{2пк}/dt$ — разрядом паразитной емкости на анодное сопротивление.

Зависимость $\Delta U_з$ от анодного тока $I_а$ декатрона, регулируемого изменением анодного сопротивления $R_а$, приведенная на рис. 10, показывает, что повышение $I_а$ приводит к резкому уменьшению $\Delta U_з$.

Вышеприведенные зависимости $\Delta U_з$ от $U_{2пк}$, τ, $dU_а/dt$, $dU_{2пк}/dt$ и $I_а$ позволяют объяснить соответствующие зависимости минимального рабочего тока декатрона $I_{а\,мин}$. Максимальная величина $\Delta U_з$, еще обеспечи-

вающая нормальную работу декатрона, т. е. зажигание разряда на катод, примыкающий к горящему второму подкатоду, всегда соответствует минимальному рабочему току декатрона. Таким образом, изменения $U_{2пк}$, τ, dU_a/dt, $dU_{2пк}/dt$, приводящие к повышению $\Delta U_з$, компенсируются некоторым увеличением $I_{а\,мин}$ и, наоборот, изменения $U_{2пк}$, τ, dU_a/dt, $dU_{2пк}/dt$, приводящие к понижению $\Delta U_з$, допускают уменьшение $I_{а\,мин}$. Рис. 5, 6 и 7 полностью подтверждают одинаковую качественную зависимость $\Delta U_з$ и $I_{а\,мин}$ от $U_{2пк}$, τ, dU_a/dt и $dU_{2пк}/dt$. Некоторая аномалия, наблюдаемая в ходе зависимости $I_{а\,мин} = f(U_{2пк})$ при малых $U_{2пк}$, по-видимому, связана с нарушением нормального переноса разряда с первого на второй подкатод при очень малых амплитудах $U_{2пк}$.

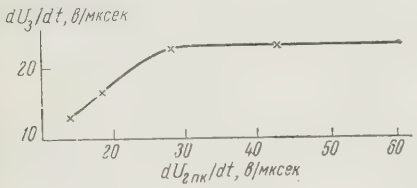


Рис. 9

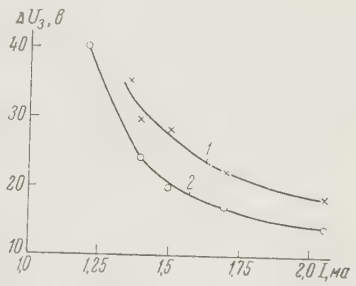


Рис. 10

Рис. 9. Зависимость скорости нарастания анодного напряжения от скорости спада напряжения на втором подкатоде

Рис. 10. Зависимость напряжения зажигания от величины анодного тока:
1 — $\tau = 7$ мксек; 2 — $\tau = 10$ мксек

Полученные закономерности справедливы и для декатронов, наполненных инертным газом.

Проведенные эксперименты позволяют дать следующее качественное описание механизма переноса разряда в декатроне.

Во время подачи отрицательного управляющего импульса на второй подкатод на него проходит ток основного разряда. Катод в это время работает в режиме зонда, окруженного униполярным слоем, толщина которого тем меньше, чем больше ионный ток, идущий на катод из основного разряда.

В момент окончания управляющего импульса потенциал второго подкатода возрастает, что приводит к спаду тока на него и росту потенциала анода, определяющего потенциал плазмы. Таким образом, в этот момент потенциал между катодом - зондом и плазмой возрастает, а ток основного разряда уменьшается. В результате установившееся распределение потенциала в униполярном слое оказывается недостаточным для экранирования поля катода; последнее проникает в плазму, что в конечном итоге и приводит к увеличению толщины униполярного слоя [2].

Зажигание разряда на катод можно рассматривать как пробой униполярного слоя, происходящий до его полной перестройки. Поскольку давление и расстояние между электродами в декатроне соответствуют правой ветви кривой Пашена, то пробой будет происходить тем легче, чем меньше в этот момент толщина униполярного слоя.

Толщина униполярного слоя будет уменьшаться с увеличением тока на катод и увеличиваться с уменьшением этого тока. Таким образом, понижение $\Delta U_з$ с уменьшением $U_{2пк}$ (рис. 5) объясняется уменьшением толщины ионной оболочки вследствие увеличения тока $I_к$ на катод зонд при уменьшении $U_{2пк}$ (рис. 2). Увеличение $\Delta U_з$ с уменьшением τ (рис. 6) связано с тем, что ионы из разряда, возникшего на второй подкатод в момент времени $t_з$ (рис. 3), не успевают в достаточном количестве продиф-

фундировать к катоду-зонду, что вызывает повышение толщины униполярного слоя вокруг последнего. Уменьшение $\Delta U_з$ с увеличением $dU_а/dt$ и уменьшением $dU_{2ик}/dt$ (рис. 7 и 8) объясняется уменьшением временно́го разрыва между прекращением тока на подкатод и ростом анодного напряжения, обусловливающим увеличение тока на катод-зонд в момент, предшествующий пробою.

Заключение. Исследование зависимости напряжения зажигания разряда между анодом и катодом от длительности и амплитуды управляющего импульса на втором подкатоде, скорости нарастания анодного напряжения, скорости спада напряжения на втором подкатоде и анодного тока показывает, что изменение напряжения зажигания разряда между анодом и катодом может быть объяснено изменением толщины униполярного слоя, окружающего катод-зонд в момент, предшествующий пробою.

Автор считает своим долгом выразить благодарность В. Л. Грановскому за обсуждение результатов работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ф. М. Яблонский, Определение предельных скоростей счета газоразрядных счетных ламп (декатронов) по характеристикам промежутка анод — катод, Радиотехника и электроника, 1960, 5, 2, 338.
2. D. Kamke, H. I. Rose, Die Trägerdichte im Plasma und ihre Bestimmung mit der Impuls-Sonde, Z. Phys., 1956, 145, 1, 83.

Поступила в редакцию
8 II 1961

РАДИОТЕХНИКА И ЭЛЕКТРОНИКА

1961 № 11

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ ВОЛЬТАМПЕРНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ УЗКИХ ГЕРМАНИЕВЫХ p-n-ПЕРЕХОДОВ

Н. А. Белова, А. Н. Ковалев

Исследовалось влияние степени легирования германия на характеристики туннельных диодов. Показано, что для узких германиевых p—n-переходов, у которых степень вырождения в p-области больше степени вырождения в n-области, напряжение, соответствующее максимуму туннельного тока, определяется степенью вырождения в p-области.

Плотность туннельного тока в максимуме растет с увеличением концентрации основных носителей в n-области (при неизменной концентрации носителей в p-области) в соответствии с изменением вероятности туннельного просачивания электронов через потенциальный барьер.

ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] показано, что на вид вольтамперной характеристики узкого германиевого p — n-перехода, изготовленного из n-германия, сильно влияет концентрация подвижных носителей заряда как в n-, так и в p-областях. В данной статье описаны результаты дальнейших экспериментальных исследований влияния степени легирования германия как n-, так и p-типа на максимум туннельного тока.

1. ВЕЛИЧИНА НАПРЯЖЕНИЯ, СООТВЕТСТВУЮЩАЯ МАКСИМУМУ ТУННЕЛЬНОГО ТОКА

Для туннельных диодов, изготовленных из электронного германия, показано [1], что величина напряжения, соответствующая максимуму туннельного тока, практически не зависит от концентрации основных носителей в n-области и определяется степенью легирования p-области, образующейся при вплавлении акцепторной примеси. В настоящей работе рассмотрено влияние концентрации основных носителей в исходном германии p-типа на вид вольтамперной характеристики узких p — n-переходов, т. е. когда концентрация основных носителей в p-области заведомо известна. С этой целью были изготовлены диоды из германия с примесью галлия при концентрации основных носителей от $1{,}5 \cdot 10^{19}$ до $5 \cdot 10^{19}$ $см^{-3}$. Область с электронной проводимостью получалась путем вплавления в пластинку германия p-типа индия с примесью мышьяка.

Для исходного германия концентрация подвижных носителей p определялась из измерения постоянной Холла; степень вырождения μ_p оценивалась при помощи соотношения

$$p = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{2\pi m_p^* kT}{h^2} \right)^{3/2} \int_0^\infty \frac{\sqrt{x}\, dx}{e^{x-\eta}+1}, \qquad (1)$$

где m_p^* — эффективная масса тяжелой дырки ($0{,}3\ m_0$); k — постоянная Больцмана; T — абсолютная температура; h — постоянная Планка; $\eta = \mu_p/kT$; при вычислении использовались таблицы, приведенные в [2].

Рассчитанная таким образом величина вырождения в применяемом германии оказалась равной: для $p = 1{,}5 \cdot 10^{19}$ $см^{-3}$ $\mu_p \sim 3\,kT$; для $p = 5 \cdot 10^{19}$ $см^{-3}$ $\mu_p = 7{,}5\,kT$.

Как указывалось выше, для образования n-области использовался мышьяк, наибольшая растворимость которого в германии равна

$6 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$ [3]. Если предположить, что при вплавлении образуется n-об ласть с концентрацией основных носителей $6 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$, то это соответству ет степени вырождения $\mu_n \simeq 2kT$. В реальных условиях во время образо вания электронной области в решетку германия наряду с мышьяко входят акцепторные примеси: галлий и индий, и поэтому концентрация основных носителей в n-области может быть только меньше $6 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$. Следовательно, у исследуемых туннельных диодов, изготовленных и p-германия, вырождение в дырочной области больше, чем в электронной, т. е. $\mu_p > \mu_n$.

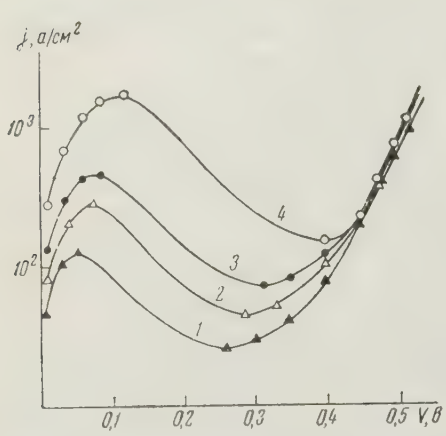


Рис. 1. Вольтамперные характеристики туннельных диодов, изготовленных из германия p-типа:

исходный германий имеет: 1 — $p = 1{,}5 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$; 2 — $p = 2{,}5 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$; 3 — $p = 3{,}5 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$; 4 — $p = 5{,}3 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$

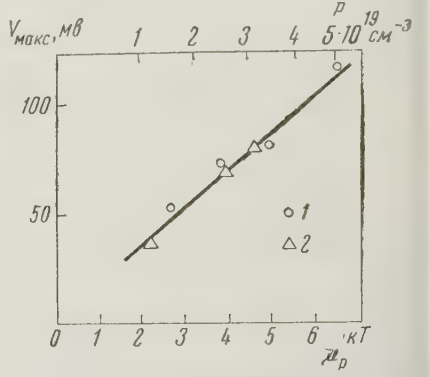


Рис. 2. Зависимость величины напряжения, соответствующей максимуму туннельного тока, от степени вырождения μ_p (или концентрации p) в p-области:

1 — диод изготовлен из p-германия; 2 — из n-германия

На рис. 1 приведены характеристики туннельных диодов, изготовленных из германия p-типа с различной концентрацией основных носителей. Наблюдалась сильная зависимость положения максимума и плотности туннельного тока от степени легирования исходного германия. Это находится в согласии с результатами работы [1] в том смысле, что на положение максимума туннельного тока оказывает определяющее влияние вырождение в p-области.

На рис. 2 построена зависимость величины напряжения, соответствующей максимуму туннельного тока, от степени вырождения в p-области. Эта зависимость линейная; прямая имеет угловой коэффициент 3/5. Таким образом, для исследуемых p — n-переходов имеет место соотношение

$$eV_{\text{макс}} \simeq \frac{3}{5}\mu_p. \qquad (2)$$

Для сравнения были изготовлены диоды из германия n-типа с постоянной концентрацией в n-области ($2 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$), но с различной степенью легирования p-области. Различная концентрация в p-области получалась путем применения разных присадок галлия в индий (от 0,5 до 1,5%). Поскольку для этих диодов по мере увеличения концентрации в p-области положение максимума сдвигается в область больших напряжений, можно было заключить, что для них $\mu_p > \mu_n$. Поэтому мы воспользовались соотношением (2) для определения степени вырождения в p-области. На рис. 2 нанесены вычисленные значения μ_p для этих диодов.

Далее сравнивались две пары диодов, изготовленных из n- и p-германия с одинаковыми значениями напряжений в максимуме (см. рис. 2

Вольтамперные характеристики двух диодов, имеющих $V_{макс} = 80$ *мв*, полностью совпадали. Для этой пары p—n-переходов можно предположить равенство концентраций соответственно как в n-, так и в p-областях. Значения концентраций приведены в таблице (p для диода из n-германия определялась при помощи (1) и (2)). На основании удовлетворительного совпадения вольтамперных характеристик этих диодов можно заключить, что концентрация носителей в электронной области у диода из p-германия также равна $2 \cdot 10^{19}$ *см*$^{-3}$.

	n, *см*$^{-3}$	φ_n	p, *см*$^{-3}$	φ_p
Диод из n-германия	$2 \cdot 10^{19}$	0,5 kT	$3{,}5 \cdot 10^{19}$	5 kT
Диод из p-германия	—	—	$3{,}5 \cdot 10^{19}$	5 kT

Что касается второй пары диодов из n- и p-германия с одинаковым значением $V_{макс} \simeq 70$ *мв*, то плотность туннельного тока в максимуме у них различна; плотность тока у диода из p-германия больше ($2 \cdot 10^2$ *асм*$^{-2}$), чем у диода из n-германия ($8 \cdot 10$ *асм*$^{-2}$). Как показано в [1], плотность туннельного тока существенно зависит от концентрации основных носителей в n-области: с увеличением концентрации в n-области возрастает плотность туннельного тока; напряжение, соответствующее максимуму туннельного тока, при этом не меняется.

В связи со сказанным выше естественно предположить, что у диода из p-германия концентрация основных носителей в n-области больше, чем у диода из n-германия. Поскольку известно, что диод из n-германия имеет концентрацию основных носителей в n-области, равную $2 \cdot 10^{19}$ *см*$^{-3}$, то диод из p-германия должен иметь концентрацию носителей в n-области, превышающую $2 \cdot 10^{19}$ *см*$^{-3}$. Из сравнения характеристик двух диодов из германия p-типа, имеющих $V_{макс} = 80$ *мв* ($p = 3{,}5 \cdot 10^{19}$ *см*$^{-3}$) и $V_{макс} = 70$ *мв* ($p = 2{,}5 \cdot 10^{19}$ *см*$^{-3}$), можно сделать вывод, что с уменьшением концентрации основных носителей в p-германии концентрация электронов в n-области увеличивается. Очевидно, при вплавлении капли индия с мышьяком в германий p-типа мышьяк с избытком компенсирует имеющийся в германии галлий, в результате чего образуется n-область. Тогда, действительно, при одинаковых условиях получения узкого p—n-перехода, с уменьшением концентрации галлия в германии, концентрация основных носителей в n-области должна возрастать и, наоборот, при увеличении концентрации галлия в германии концентрация электронов в n-области должна уменьшаться. Если предположение о компенсации справедливо, то должен существовать такой предел концентрации галлия в исходном германии, когда при вплавлении мышьяк не может уже скомпенсировать имеющиеся акцепторы, и n-область не образуется.

Действительно, на опыте не удалось получить туннельных диодов при концентрации основных носителей в германии p-типа, превышающей $6 \cdot 10^{19}$ *см*$^{-3}$.

Необходимо отметить, что, взяв в качестве исходного материала германий p-типа, по-видимому, можно получить туннельные диоды с лучшими параметрами по сравнению с туннельными диодами из германия n-типа. Это объясняется, в частности, тем, что концентрация $6 \cdot 10^{19}$ *см*$^{-3}$ не является пределом растворимости для галлия в германии, и поэтому при вплавлении легче получить более совершенную структуру p — n-перехода, чем при использовании n-германия с концентрацией мышьяка, близкой к пределу растворимости.

2. ВЕЛИЧИНА МАКСИМУМА ТУННЕЛЬНОГО ТОКА

В работе [1] показано, что величина максимума туннельного тока очень сильно зависит от концентрации основных носителей в n-области; при этом напряжение, соответствующее максимуму, практически не изменяется (при одной и той же степени легирования p-области). В этом случае можно предположить, что главное влияние на туннельный ток оказывает величина прозрачности потенциального барьера, которая особенно сильно (экспоненциально) зависит от толщины барьера, а следовательно, от концентрации основных носителей n и p. Чтобы проверить это предположение, мы сопоставили наши экспериментальные данные с выражением для прозрачности барьера. Последнее, как следует из [3], в простейшем случае однородного поля в переходе имеет вид

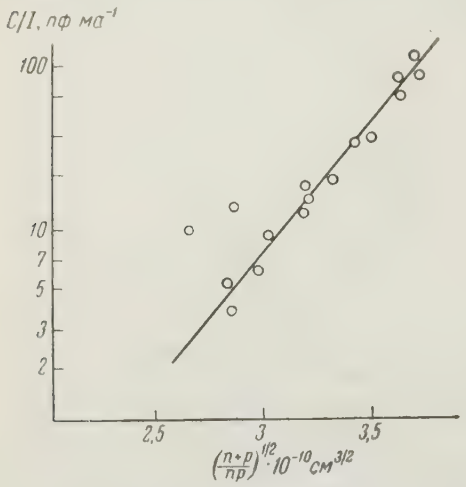


Рис. 3. Зависимость $\ln \frac{C}{I}$ от $\left(\frac{n+p}{np}\right)^{1/2}$ для диодов, изготовленных из n-германия с концентрацией в p-области, равной $2{,}5 \cdot 10^{19}$ см$^{-3}$

$$P \sim \exp\left(-\frac{\pi m_r^{*1/2} \Delta E^{3/2}}{2\hbar e E}\right),$$

где ΔE — ширина запрещенной зоны; E — напряженность поля в переходе; m_r^* — приведенная эффективная масса. Приняв, что $\Delta E = e\varphi_к$, где $\varphi_к$ — контактная разность потенциалов, а $E = \varphi_к/w$, где w — толщина запирающего слоя, равная

$$w = \left[\frac{\varepsilon \varphi_к (n+p)}{2\pi e n p}\right]^{1/2},$$

получим

$$P \sim \exp\left[-\frac{\pi^{3/2} m_r^{*1/2} \Delta E}{2\hbar e^{1/2}} \left(\frac{n+p}{np}\right)^{1/2}\right].$$

Для исключения неизвестной площади перехода можно взять отношение емкости перехода C к туннельному току в максимуме I. Тогда

$$C/I \sim \exp A \left(\frac{n+p}{np}\right)^{1/2},$$

где

$$A = \frac{\pi^{3/2} m_r^{*1/2} \Delta E}{2\hbar e^{1/2}},$$

т. е. следует ожидать линейную зависимость $\ln \frac{C}{I}$ как функции от $[(n+p)/np]^{1/2}$. На рис. 3 приведена экспериментальная зависимость $\ln \frac{C}{I}$ от $[(n+p)/np]^{1/2}$ для диодов с одинаковым вырождением в p-области. Прямая на рисунке имеет наклон $5 \cdot 10^{10}$. Значение для $A = 5 \cdot 10^{10}$ при $\Delta E = 0{,}7$ эв дает $m_r^* = 0{,}08\, m_0$.

Таким образом, поведение туннельного тока в максимуме в исследованной области концентраций приближенно можно описать выражением вероятности туннельного просачивания электронов через потенциальный барьер.

Согласно сказанному выше, туннельный ток в максимуме весьма чувствителен к степени легирования n- и p-областей. Используя соотношения

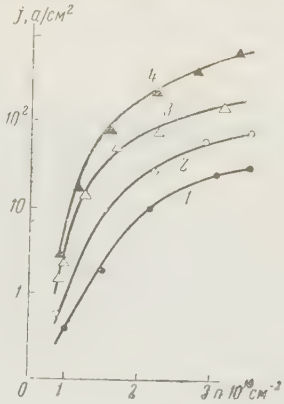


Рис. 4. Зависимость плотности туннельного тока в максимуме от концентрации основных носителей n и p. Концентрации в p-области:
1 — $1{,}3\cdot10^{19}$ см$^{-3}$; *2* — $1{,}8\cdot10^{19}$ см$^{-3}$; *3* — $2{,}5\cdot10^{19}$ см$^{-3}$; *4* — $3{,}2\cdot10^{19}$ см$^{-3}$

(1) и (2), можно построить семейство экспериментальных зависимостей плотности туннельного тока от концентрации основных носителей n и p для диодов, изготовленных из германия n-типа. На рис. 4 приведены такие зависимости.

3. ДИФФУЗИЯ ПРИМЕСЕЙ В ПРОЦЕССЕ ВПЛАВЛЕНИЯ

При изготовлении узких p — n-переходов на p-германии была обнаружена сильная зависимость максимума туннельного тока от температуры вплавления в германий индия с мышьяком. На рис. 5 видно как по мере

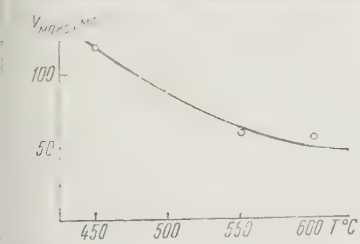


Рис. 5. Напряжение, соответствующее максимуму туннельного тока, в зависимости от температуры вплавления ($p = 5\cdot10^{19}$ см$^{-3}$)

увеличения температуры вплавления максимум туннельного тока сдвигается в сторону меньших напряжений. Как следует из сказанного выше, такое движение максимума соответствует уменьшению концентрации носителей в p-области, несмотря на то, что для всех диодов применялся исходный германий одинаковой концентрации p. Такое изменение концентрации носителей в p-области с изменением температуры вплавления возможно из-за диффузии мышьяка в процессе вплавления. Известно, что скорость диффузии и растворимость донорных примесей сильно зависят от температуры [4]. Следовательно, при прочих равных условиях (время вплавления и концентрация мышьяка в капле индия) с увеличением температуры вплавления растет концентрация донорной примеси, входящей в германий p-типа, которая сильнее компенсирует находящийся в нем галлий, и, таким образом, уменьшается концентрация подвижных носителей в слое p-германия, расположенного в непосредственной близости от p—n-перехода. Уменьшение концентрации в p-области вызывает наблюдаемое изменение напряжения, соответствующего максимуму туннельного тока.

Как показали экспериментальные исследования, с увеличением температуры вплавления уменьшается также плотность туннельного тока, что указывает на расширение запорного слоя p - n-перехода с увеличением температуры.

Для того чтобы уменьшить влияние диффузии, изготовление туннельных диодов из германия p-типа производилось в вакууме при минимально возможной температуре 450° С. При изготовлении p — n-переходов в атмосфере водорода возможно применение более низкой температуры вплавления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Экспериментально изучено влияние степени легирования n- и p-областей узкого p — n-перехода на туннельный ток и, в частности, на величину и положение максимума вольтамперной характеристики. Для исследованных диодов, имевших большую степень вырождения в p-области ($\mu_p > \mu_n$), найдено, что напряжение, соответствующее максимуму туннельного тока, определяется степенью вырождения в дырочной области: положение максимума пропорционально степени вырождения μ_p.

Изменение величины туннельного тока в максимуме с изменением концентрации основных носителей в n-области определяется в основном концентрационной зависимостью вероятности туннельного просачивания электронов сквозь потенциальный барьер.

В заключение авторы благодарят С. Г. Калашникова, В. Л. Бонч-Бруевича и Н. Е. Скворцову за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Н. А. Белова, А. Н. Ковалев, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 1, 160.
2. E. Spenke, Elektronische Halbleiter, Berlin, 1956.
3. F. A. Trumbore, Bell System Techn. J., 1960, 39, 1, 169.
4. Л. В. Келдыш, ЖЭТФ, 1957, 33, 4, 994.
5. Y. Furukawa, J. Phys. Soc. Japan, 1960, 15, 4, 730.

Институт радиотехники
и электроники АН СССР

Поступила в редакцию
14 III 1961

СОПОСТАВЛЕНИЕ СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ГЕРМАНИЕВЫХ ДИОДОВ ПРИ ОТРИЦАТЕЛЬНОМ СМЕЩЕНИИ

Л. С. Лотоцкий

Описаны результаты исследования германиевых диодов при отрицательном смещении в динамическом режиме. Изложен расчет экспериментального параметрического усилителя СВЧ. Показана возможность использования статических характеристик диодов для расчета параметрических усилителей.

ВВЕДЕНИЕ

В режиме параметрического усиления полупроводниковые диоды работают при подаче на них напряжения накачки значительной величины по сравнению с усиливаемым сигналом, т. е. в динамическом режиме. В то же время параметры диодов определяются, как правило, при малых значениях мощности СВЧ [1] и [2], т. е. являются статическими.

При расчете параметрических усилителей обычно полагают, что статические и динамические параметры диодов одинаковы, хотя это и не очевидно. Из имеющихся в литературе данных нельзя сделать однозначного вывода, поскольку всевозможные конструктивные особенности параметрических усилителей затрудняют выражение их параметров (коэффициента усиления, полосы пропускания, коэффициента шума) через статические параметры диодов. На сложных схемах параметрических усилителей трудно опытным путем проверить справедливость этого предположения.

В связи с этим были поставлены следующие задачи: во-первых, создать параметрический усилитель с простейшей эквивалентной схемой, параметры которого можно выразить через статические характеристики диода; во-вторых, на основе сопоставления экспериментальных результатов с расчетом выяснить возможность применения обычной методики для определения параметров диодов, предназначенных для параметрических усилителей СВЧ.

1. ЭКВИВАЛЕНТНАЯ СХЕМА И РАСЧЕТ ПАРАМЕТРОВ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОГО УСИЛИТЕЛЯ

В работе [3] приведен расчет одноконтурного параметричесого усилителя с использованием на входе циркулятора. Эквивалентная схема такого усилителя имеет вид, представленный на рис. 1. На этой схеме X_L — индуктивное сопротивление резонатора; L — индуктивность контактной проволоки диода; C_0 — емкость запорного слоя диода в рабочей точке; $R_п$ — сопротивление потерь диода; $C_п$ — паразитная емкость, обусловленная патроном диода и конструкцией резонатора; e — эдс источника сигнала; Z_0 — волновое сопротивление линии, подводящей сигнал.

Схема, показанная на рис. 1, отличается от принятой для расчета схемы в [3] наличием паразитной емкости $C_п$. Влияние этой емкости можно учесть, если заменить параллельное соединение элементов между точками *а* и *б* схемы рис. 1 на последовательное. Такая замена дает схему, изображенную на рис. 2, где

$$X = \frac{\omega LD - (D/\omega C_0) = \omega C_п R_п^2}{D^2 + \omega^2 C_п^2 R_п^2}; \qquad (1)$$

$$R = \frac{R_п}{D^2 + \omega^2 C_п^2 R_п^2}; \qquad (2)$$

D — коэффициент трансформации, учитывающий влияние паразитной емкости $C_п$,

$$D = 1 + (C_п/C_0) - \omega^2 LC_п. \tag{3}$$

При настройке контура в резонанс

$$X + X_L = 0 \tag{4}$$

и эквивалентная схема рис. 2 преобразуется в схему, представленную на рис. 3, где $R_{-эф}$ — эффективное отрицательное сопротивление, вносимое в контур при подаче на диод напряжения накачки. С учетом трансформации

$$R_{-эф} = m\,(1 - a)/2\omega_0 C_0 D^2, \tag{5}$$

где

$$a = \omega^2 LC_п;\ m = \frac{C_{макс} - C_{мин}}{C_{макс} + C_{мин}},$$

m — коэффициент глубины модуляции емкости запорного слоя диода.

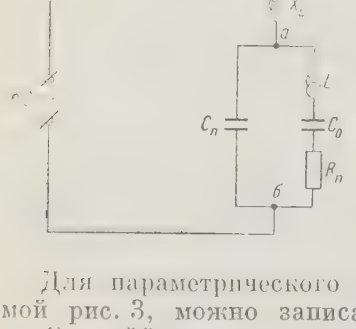


Рис. 1. Эквивалентная схема одноконтурного параметрического усилителя

Для параметрического усилителя, описываемого эквивалентной схемой рис. 3, можно записать выражения для:

1) коэффициента усиления по мощности G:

$$G \simeq \frac{Z_0^2}{\{Z_0 + (R_п/D^2) - [m\,(1 - a)/2\omega_0 C_0 D^2]\}^2}; \tag{6}$$

2) относительной полосы пропускания $\Delta f/f_0$:

$$\Delta f/f_0 \simeq \omega_0 C_0 Z_0 D/\sqrt{G}; \tag{7}$$

3) коэффициента шума F:

$$F = 1 + \frac{R_п}{D^2 Z_0}. \tag{8}$$

В работе [3] расчет проделан для эквивалентной схемы с сосредоточенными индуктивностью L и емкостью C контура. Практически в диапазоне СВЧ нельзя изготовить резонатор, полностью отвечающий эквивалентной схеме [3].

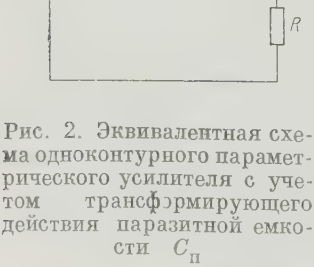


Рис. 2. Эквивалентная схема одноконтурного параметрического усилителя с учетом трансформирующего действия паразитной емкости $C_п$

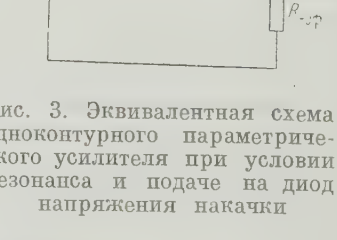


Рис. 3. Эквивалентная схема одноконтурного параметрического усилителя при условии резонанса и подаче на диод напряжения накачки

В резонаторе, использованном в экспериментальном параметрическом усилителе, для настройки контура в резонанс служил индуктивный шлейф, который вносит изменения в частотную характеристику усилителя. Однако влияние индуктивного шлейфа на полосу усилителя можно

честь в расчете. Как известно, ширина полосы определяется из усло-ия равенства активной и реактивной составляющих сопротивления кон-ура:

$$X\left(\omega_0+\frac{\Delta\omega}{2}\right)=r \text{ при } X(\omega_0)=0.$$

В нашем случае

$$X(\omega_0)\simeq(1/D)[\omega_0 L-(1/\omega_0 C_0)-\omega_0 C_{\text{п}} R_{\text{п}}^2/D]+Z_0\operatorname{tg}\frac{\omega_0 l}{c}, \tag{9}$$

де l — длина индуктивного шлейфа; c — скорость света.

$$r\simeq Z_0+(R_{\text{п}}/D^2)-[m(1-a)/2\omega_0 C_0 D^2]. \tag{10}$$

Формулы (6) — (10) написаны при условии, что $D^2\gg\omega^2L^2C_{\text{п}}^2$. В диа-азоне СВЧ это соотношение хорошо выполняется и поэтому величиной $^2L^2C_{\text{п}}^2$ можно пренебречь.

Давая ω_0 приращение $\Delta\omega/2$ и раскладывая в ряд по $\Delta\omega/2$, получим

$$\frac{\Delta\omega}{2\omega_0}\left\{(1/D)\left[\omega_0 L_0+(1/\omega_0 C_0)-\omega_0 C_{\text{п}}R_{\text{п}}^2/D\right]+\left(Z_0\omega_0 l/c\cos^2\frac{\omega_0 l}{c}\right)\right\}=$$
$$=Z_0+(R_{\text{п}}/D^2)-[m(1-a)/2\omega_0 C_0 D^2].$$

Отсюда выражение для относительной полосы пропускания усилителя учетом влияния индуктивного шлейфа:

$$\Delta\omega/\omega=\frac{2\{Z_0+(R_{\text{п}}/D^2)-[m(1-a)/2\omega_0 C_0 D^2]\}}{(1/D)[\omega_0 L_0+(1/\omega_0 C_0)-\omega_0 C_{\text{п}}R_{\text{п}}^2/D]+\left(Z_0\omega_0 l/c\cos^2\frac{\omega_0 l}{c}\right)}. \tag{11}$$

Выражение (11) можно упростить. Если учесть, что

$$\sqrt{G}=Z_0/\{Z_0+(R_{\text{п}}/D^2)-[m(1-a)/2\omega_0 C_0 D^2]\}$$

и если в знаменателе выражения (11) добавить и вычесть $1/\omega_0 C_0$ и $Z_0\operatorname{tg}\frac{\omega_0 l}{c}$,

то

$$\Delta\omega/\omega=\frac{2Z_0}{\left\{(2/D\omega_0 C_0)+Z_0\left[\left(\frac{\omega_0 l}{c}\Big/\cos^2\frac{\omega_0 l}{c}\right)-\operatorname{tg}\omega_0 l/c\right]\right\}\sqrt{G}}. \tag{12}$$

Формула (12) отличается от выражения (7) для полосы пропускания наличием дополнительного члена в знаменателе, что уменьшает полосу пропускаемых частот. Для того чтобы пользоваться формулами, приведенными выше, необходимо знать величину паразитной емкости $C_{\text{п}}$. Она зависит от конструкции резонатора, в который помещается диод, и может не совпадать с величиной емкости патрона диода, измеренной по методике [1] и [2].

Если связь резонатора с линией, подводящей сигнал, не зависит от частоты и по величине такова, что волновое сопротивление линии Z_0 полностью включается в активные потери контура, то паразитную емкость $C_{\text{п}}$ можно измерить на основе следующих соображений.

Коэффициент стоячей волны напряжения в линии, подводящей сигнал, ρ при настройке усилителя в резонанс равен

$$\rho=Z_0/R=Z_0D^2/R_{\text{п}}. \tag{13}$$

Если в отсутствие частоты накачки настроить контур в резонанс при двух значениях приложенного к диоду отрицательного напряжения, т. е. при двух известных значениях емкости запорного слоя диода C_0, то полу-

чим два значения ρ соответственно. Тогда, используя (3) и (13), получаем два уравнения относительно $C_п$ и L:

$$1 + (C_п/C_{01}) - \omega_0^2 LC_п = \sqrt{\rho_1 R_п/Z_0},$$

$$1 + (C_п/C_{02}) - \omega_0^2 LC_п = \sqrt{\rho_2 R_п/Z_0},$$

решая которые, находим

$$C_п = \frac{\sqrt{\rho_2 R_п Z_0} - \sqrt{\rho_1 R_п Z_0}}{\frac{1}{C_{02}} - \frac{1}{C_{01}}}.$$

Где ρ_1, ρ_2 и C_{01}, C_{02} — значения коэффициента стоячей волны напряжения и емкости запорного слоя диода при напряжениях смещения U_1 и U_2 соответственно.

Таким образом, зная $C_п$, мы можем рассчитать коэффициент усиления, полосу пропускания и коэффициент шума параметрического усилителя, используя статические параметры диода C_0, $R_п$ и m.

2. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В соответствии с приведенной выше эквивалентной схемой был разработан параметрический усилитель. При разработке усилителя величина волнового сопротивления линии Z_0 выбиралась таким образом, чтобы при

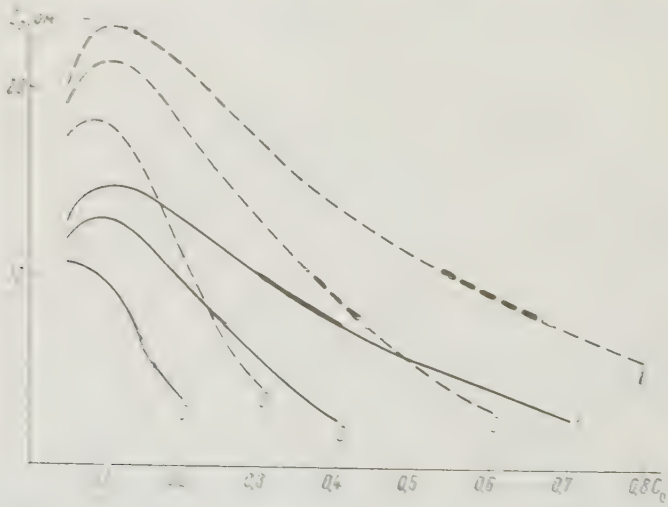


Рис. 4. Зависимость величины Z_0 от емкости запорного слоя диода C_0 в рабочей точке для различных значений m (сплошная линия — $m = 0{,}4$, пунктир — $m = 0{,}6$ и $R_п$):

1 — $R_п = 5$ ом; *2* — $R_п = 10$ ом; *3* — $R_п = 20$ ом

максимальном использовании диода полностью компенсировать вносимые в контур потери, т. е.

$$Z_0 + (R_п/D^2) = m_{макс}(1 - a)/2\omega_0 C_0 D^2. \qquad (14)$$

В соответствии с уравнением (14) были построены графики, приведенные на рис. 4, которые позволяют для различных значений статических параметров диодов C_0, $R_п$ и m определять необходимую величину Z_0. Конструкция усилителя позволяет изменять величину Z_0 в необходимых пределах. На экспериментальном усилителе были измерены полоса пропускания и коэффициент усиления.

Полоса пропускания усилителя рассчитывалась по измеренному коэффициенту усиления G и по известным величинам Z_0, C_0, ω_0, L и D. Сопостав-

ение измеренного коэффициента усиления с расчетным не имеет смысла, ак как в знаменатель выражения (6) входит величина, определяемая малой степенью точности. Следует еще отметить, что значение истинной еличины коэффициента модуляции емкости диода в режиме усиления очно не известно, и это может приводить к дополнительным ошибкам расчете коэффициента усиления.

№ диода	C_0, *пф*	Измеренные значения		Рассчитанные значения
		G, дб	*Δf, Мгц*	*Δf, Мгц*
444	0,15	27	7	10
468	0,08	27	5	4
455	0,08	29	5	3
360	0,13	22	17	14
470	0,15	25	15	14
378	0,12	25	11	9
357	0,17	27	10	11
649	0,11	27	9	8
641	0,14	26	14	13
643	0,18	27	7	12

Результаты измерений приведены в таблице, из которой видно, что впадение измеренной и рассчитанной полос усиления удовлетворитель-ое. Это обстоятельство позволяет сделать вывод, что статические раметры диодов могут быть использованы для расчетов основных ха-актеристик параметрических усилителей СВЧ.

В заключение автор считает своим долгом выразить благодарность . А. Меркурьеву за помощь и руководство по разработке экспериментального параметрического усилителя, а также Ю. Ф. Соколову и . Е. Скворцовой за обсуждение и критические замечания по данной ра-те.

ЛИТЕРАТУРА

Ф. С. Русин, Н. Е. Скворцова, Ю. Ф. Соколов, Сб. Полупроводниковые приборы и их применение, Изд. Советское радио, 1958, 3.
Ю. Ф. Соколов, Радиотехника и электроника, 1961, 6, 3, 399.
В. С. Эткин и др., Радиоэлектронная промышленность, 1959, 17.

Поступила в редакцию
28 III 1961

КРАТКИЕ СООБЩЕНИЯ

ПЕРЕХОДНЫЕ ШУМЫ ПРИ ДВУХЛУЧЕВОМ РАСПРОСТРАНЕНИИ РАДИОВОЛН

А. В. Просин

Известно, что при распространении УКВ в тропосфере имеет место многолучевое распространение радиоволн. В результате сигнал в месте приема является суперпозицией двух или большего количества колебаний с различными амплитудами и фазами. В радиорелейных линиях связи с частотной модуляцией и частотным уплотнением, использующих как дальнее распространение УКВ, так и распространение УКВ в пределах прямой видимости, многолучевость приводит к возникновению переходных шумов в каналах связи. В настоящем сообщении дана методика расчета переходных шумов, возникающих при двухлучевом распространении радиволн, для специального случая, когда с помощью автоподстройки частоты передатчика производится выбор оптимальной рабочей точки на фазовой характеристике двухлучевого канала.

Пусть передатчик излучает колебание с мгновенной частотой, определяемой выражением

$$\omega(t) = \omega_0 + \Delta\omega_m u(t), \qquad (1$$

где ω_0 — угловая несущая частота; $\Delta\omega_m$ — максимальная угловая девиация частоты; $u(t)$ — многоканальное сообщение, удовлетворяющее условию $-1 \leqslant u \leqslant 1$ вероятностью, близкой к единице. Модулирующая функция $u(t)$ представляет собой случайный стационарный процесс, подчиняющийся нормальному закону распределения вероятностей.

Тогда при двухлучевом распространении радиоволн частотная и фазовая характеристики среды распространения будут равны

$$A(\omega) = \sqrt{1 + k^2 + 2k\cos\omega(t)\tau_3}, \qquad (2$$

$$\varphi(\omega) = \operatorname{arc\,tg}\left[\frac{k\sin\omega(t)\,\tau_3}{1 + k\cos\omega(t)\,\tau_3}\right], \qquad (3$$

где $k \leqslant 1$ — отношение амплитуд сигналов (меньшего к большему); τ_3 — относительная временна́я задержка между двумя лучами.

На рис. 1 приведены фазовые характеристики среды распространения для трех значений k. Построение кривых по формуле (3) произведено в пределах от 0 до 2π. Из (2), (3) и рис. 1 следует, что частотная и фазовая характеристики являются периодическими функциями аргумета $\omega(t)\tau_3$.

Анализ выражения (3) и рис. 1 показывает, что наименьшая величина перекрестных искажений будет в случае, когда рабочая точка на фазовой характеристике среды распространения располагается в точке, кратной 2π. При таком выборе рабочей точки для $k = 1$ фазовая характеристика в пределах $\pm\pi$ линейна. В этом случае при идеальном частотном детекторе в приемнике переходные шумы в каналах связи будут отсутствовать.

На практике k и τ_3 являются случайными функциями времени, скорость изменения которых весьма мала по сравнению со скоростью изменения модулирующего сообщения. Вариации отношения амплитуд сигналов будут приводить к изменению формы фазовой характеристики. Флуктуации относительной временно́й задержки обусловят блуждание рабочей точки по фазовой характеристике среды распространения.

Из (1), (3) следует, что положение рабочей точки на фазовой характеристике определяется произведением $\omega_0\tau_3$. Поскольку τ_3 изменяется весьма медленно по сравнению с $u(t)$, то, по-видимому, можно путем автоподстройки несущей частоты передатчика выбирать и удерживать на фазовой характеристике требуемую рабочую точку. Описание практических способов осуществления такой специальной автоподстройки выходит за рамки настоящего сообщения. В частности, ее, по-видимому, можно осуществить путем замера амплитуд второй и последующих гармоник, возникающих при передаче по линии связи специального испытательного тона.

Перейдем к расчету переходных помех при условии, что посредством указанной втоподстройки на фазовой характеристике среды распространения выбрана оптимальная рабочая точка, соответствующая произведению $\omega_0\tau_з = n\cdot 2\pi$, где $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$.

Разложим функцию (3) в окрестности точки 0 (рис. 1) в ряд Маклорена по степеням $\Delta\omega\tau_з$, где $\Delta\omega = \Delta\omega_m u(t)$:

$$\varphi(\Delta\omega) = \varphi_0 + \varphi_1\Delta\omega + \varphi_2\Delta\omega^2 + \varphi_3\Delta\omega^3 + \ldots + \varphi_n\,\Delta\omega^n + \ldots . \qquad (4)$$

Поскольку функция (3) нечетная, то в (4) — постоянный член φ_0, и четные члены разложения φ_2, φ_4 и т. п. будут равны нулю. Второй член в (4) представляет собой исходное неискаженное многоканальное сообщение. Тогда выражение для фазовых искажений будет иметь вид

$$\Delta\varphi(\Delta\omega) = \varphi_3\Delta\omega^3 + \varphi_5\Delta\omega^5 + \varphi_7\Delta\omega^7 + \ldots . \qquad (5)$$

Из формулах (4) и (5)

$$\varphi_1 = \frac{\tau_з}{1!}\,\frac{k}{1+k}, \qquad (6)$$

$$\varphi_3 = -\frac{\tau_з^3}{3!}\,\frac{k(1-k)}{(1+k)^3} = -\frac{\tau_з^3}{3!}\,y_1, \qquad (7)$$

$$\varphi_5 = \frac{\tau_з^5}{5!}\,\frac{k(1-k)}{(1+k)^9}\,(k^6 - 6k^5 - 33k^4 - 52k^3 - 33k^2 - 6k + 1) = \frac{\tau_з^5}{5!}\,y_2, \qquad (8)$$

$$\varphi_7 = \frac{\tau_з^7}{7!}\,\frac{k(1-k)}{(1+k)^{12}}\,(1 - 571k^2 - 664k^3 + 498k^4 + 1316k^5 + 850k^6 - 44k^7 - 211k^8 - 6k^9) = \frac{\tau_з^7}{7!}\,y_з. \qquad (9)$$

На рис. 2 построены функции y_1, y_2 и $y_з$ в зависимости от k. Отсюда следует, что при $k = 1$ функции y_1, y_2 и $y_з$ равны нулю. Следовательно, выражение (5) для фазовых искажений при $k = 1$ также обращается в нуль.

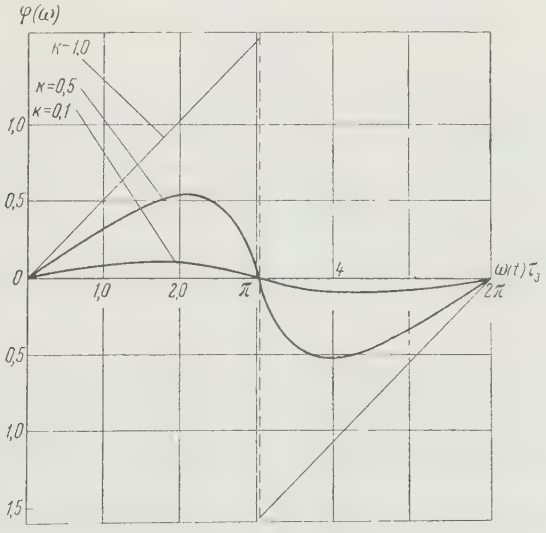


Рис. 1

В работе [1] показано, что псофометрическая мощность перекрестных шумов, возникающих из-за нелинейности фазовой характеристики четырехполюсника, в телефонном канале в точке с нулевым относительным уровнем равна

$$P_ш = 10^9\,\frac{\Delta F_к K_и^2}{\Delta F}\,\Omega_к^2 \cdot 6\varphi_з^2\Delta\omega_к^4 e^{6b_{ср}y_з}\,(\beta, \sigma) + \ldots \text{ вт}, \qquad (10)$$

где фазовая характеристика четырехполюсника аппроксимируется полиномом (4). Следовательно, расчет перекрестных шумов при двухлучевом распространении радиоволн

сводится к расчету переходных шумов, возникающих при передаче многоканальног частотно-модулированного сигнала через четырехполюсник с нелинейной фазовой ха рактеристикой.

Подставляя (7)—(9) в (10), получим формулу для расчета переходных шумов пр двухлучевом распространении радиоволн:

$$P_{шт} = \frac{10^9}{6}\frac{k^2(1-k)^2}{(1+k)^6}\frac{\Delta F_к K_п^2}{\Delta F}\Omega_к^2\tau_з^6\Delta\omega_к^4 e^{6b_{ср}} y_з(\beta,\sigma) + \ldots, \quad (11$$

где $\Delta F_к$ — ширина полосы телефонного канала; $K_п$ — псофометрический коэффициен ($K_п = 0{,}75$ при $\Delta F_к = 3{,}1$ *кгц*); $\Delta F = F_2 - F_1$ — ширина полосы всех каналов

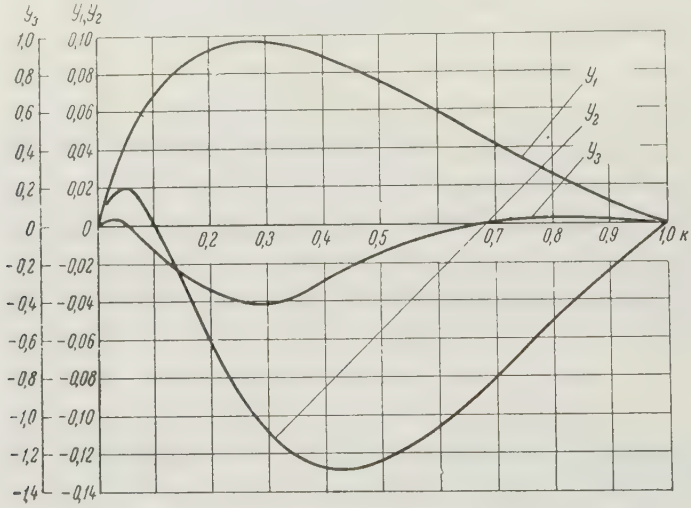


Рис. 2

линейном спектре многоканального сообщения; F_2 и F_1 — верхняя и нижняя грани ные частоты линейного спектра; $\Omega_к = 2\pi F_к$; $F_к$ — средняя частота канала в линей ном спектре многоканального сообщения; $\Delta\omega_к = 2\pi\Delta f_к$; $\Delta f_к$ — эффективная величи на девиации частоты на канал; $b_{ср}$ — разность в неперах между уровнем средней мощ ности всех каналов и измерительным уровнем одного канала (согласно рекомендациям МККФ [2] $b_{ср} = -1{,}72 + 0{,}5\ln N$, где N — число телефонных каналов); $y_з(\beta,\sigma)$ — коэффициент, который определяется по графикам рис. 6.2 [2].

В реальных системах связи на ультракоротких волнах величина временной за держки обычно не превышает долей микросекунд. При таких величинах $\tau_з$ относи тельно легко будет выполняться наравенство

$$m_{mэ}\Omega_2\tau_з \leqslant 1, \quad (12$$

где $m_{mэ}$ — эффективный индекс модуляции. При выполнении (12) в (11) следует учи тывать лишь шумы, вызванные нелинейностью третьего порядка (первый член (11)) Нелинейность более высокого порядка будет значительно меньше и ее можно не учи тывать. В дальнейшем при анализе переходных шумов будем полагать, что неравенство (12) имеет место.

В таблице согласно рекомендациям МККФ [2] приведены параметры многоканаль ных радиорелейных линий связи с частотной модуляцией и уплотнением каналов по частоте. В последнем столбце даны значения $\tau_з$, рассчитанные на основании (12).

Максимальное число рабочих каналов	Граничные частоты линейного спектра, *кгц*	Эффективная величина девиации частоты на канал, *кгц*	Эффективный индекс модуляции	Величина β	$\tau_з$, *мксек*
60	60—300	200	0,93	5	0,57
120	60—552	200	0,72	9,2	0,401
240	60—1052	200	0,53	17,5	0,286
480	60—2044	200	0,39	34	0,2
600	60—2540	200	0,345	42,3	0,182
900	60—4028	200	0,29	67	0,137

Анализ (11) показывает, что наибольшая величина перекрестных шумов имеет место в канале с частотой $\Omega_к = \Omega_2$. При $k = 0$ и $k = 1$ переходные шумы будут отсутствовать. Максимальные искажения возникают при $k_m = 2 - \sqrt{3}$. Наибольшая величина переходных шумов при $k = k_m$ согласно (11) и (12) будет равна

$$P_{шm} = \frac{10^9}{6} \frac{(3\sqrt{3}-5)^2}{(3-\sqrt{3})^6} \frac{\Delta F_k K_п^2}{\Delta F} \Omega_2^2 \tau_з^6 \Delta\omega_k^4 e^{6b_{ср}} y_з(\beta, \sigma). \qquad (13)$$

В (13) постоянный коэффициент равен $1{,}4 \cdot 10^6$.

При определении спектра перекрестных помех (и, следовательно, (11) и (13)) величины k и $\tau_з$ считались постоянными, поскольку скорость их изменения весьма мала

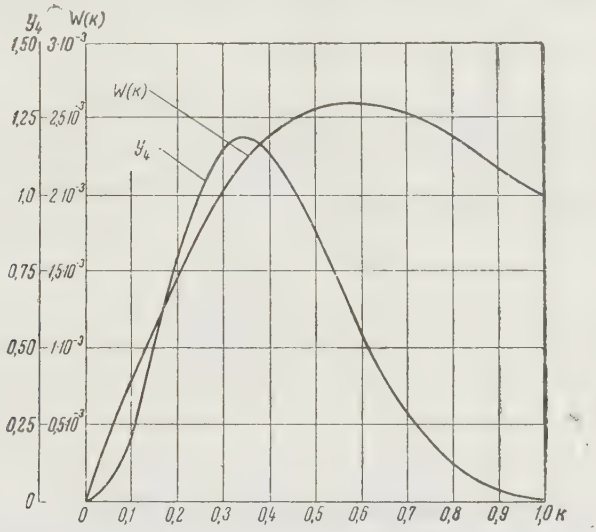


Рис. 3

по сравнению со скоростью изменения многоканального сообщения. Далее будем предполагать, что k и $\tau_з$ являются независимыми стационарными случайными процессами. Тогда мощность $P_{шm}$ будет являться, так же как k и $\tau_з$, случайным стационарным процессом, для которого среднее по времени равно среднестатистическому значению:

$$P_{шc} = \overline{P_{шm}(k, \tau_з)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} P_{шm}(k, \tau_з)\, W(k, \tau_з)\, dk\, d\tau_з. \qquad (14)$$

Допустим далее, что: 1) амплитуды двух сигналов, приходящих в точку приема, независимы и подчиняются релеевскому закону распределения вероятностей, имея одинаковые средние значения, 2) относительная задержка равномерно распределена в интервале $\tau_{зm}$, где $\tau_{зm}$ — максимальная временна́я задержка. Тогда функции распределения k и $\tau_з$ будут равны (вывод (15) дан в Приложении):

$$W(k) = \frac{4k}{(1+k^2)^2}, \quad 0 \leqslant k \leqslant 1, \quad W(k) = 0, \quad 0 > k > 1, \qquad (15)$$

$$W\left(\frac{\tau_з}{\tau_{зm}}\right) = 1, \quad 0 \leqslant \frac{\tau_з}{\tau_{зm}} \leqslant 1, \quad W\left(\frac{\tau_з}{\tau_{зm}}\right) = 0, \quad 0 > \frac{\tau_з}{\tau_{зm}} > 1. \qquad (16)$$

Подставляя (11), (15) и (16) в (14) и учитывая неравенство (12), получим

$$P_{шc} = \frac{2}{3} 10^9 \frac{\Delta F_к K_п^2}{\Delta F} \Omega_2^2 \tau_{зm}^6 \Delta\omega_к^4 e^{6b_{ср}} y_з(\beta, \sigma) \int_0^1 \int_0^1 \frac{k^3 (1-k)^2}{(1+k)^6 (1+k^2)^2} \left(\frac{\tau_з}{\tau_{зm}}\right)^6 \times dk\, d\left(\frac{\tau_з}{\tau_{зm}}\right) = 10^5 \frac{\Delta F_к K_п^2}{\Delta F} \Omega_2^2 \Delta\omega_к^4 \tau_{зm}^6 e^{6b_{ср}} y_з(\beta, \sigma). \qquad (17)$$

На рис. 3 построена функция $y_4 = k^3 (1-k)^2(1+k)^{-6}(1+k^2)^{-2}$. Из анализа (1
и (17) следует, что при усреднении по k и $\tau_з$ мощность переходных шумов по сравнени
с максимумом (13) уменьшилась в 14 раз. Интересно отметить, что при равномерном ра
пределении величины k в пределах от нуля до единицы мощность $P_{шс}$ практическ
также определяется (17).

В заключение приведем пример расчета переходных шумов. Многоканальная с
стема имеет следующие параметры: $N = 240$, $\Delta F_к = 3{,}1$ *кгц*, $K_п = 0{,}75$, ΔF
$=1052-60$ *кгц*, $F_2=1052$ *кгц*, $\Delta f_к = 200$ *кгц*, $b_{ср} = 1$, $\tau_{зт} = 0{,}2$ *мксек*, *уз* (β, σ)
$= 0{,}45$. Подставляя все необходимые значения в (17), получим $P_{шс} = 200$*пвт*.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вывод формулы для функции распределения частного двух независимых случайных величин, подчиняющихся закону Релея с параметрами σ_1 и σ_2

Функция распределения частного имеет вид

$$W\left(\frac{x_2}{x_1} = k_1\right) = \frac{k_1}{\sigma_1^2\sigma_2^2}\int_0^\infty x_1^3 e^{-\frac{x_1^2}{2\sigma_1^2\sigma_2^2}\left(\sigma_2^2+\sigma_1^2k_1^2\right)} dx_1. \qquad (I$$

Осуществив интегрирование, получим

$$W\left(\frac{x_2}{x_1} = k_1\right) = 2\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2k_1}{\sigma_2^2+\sigma_1^2k_1^2}. \qquad (I$$

Аналогично для $x_1/x_2 = k_2$ будем иметь

$$W\left(\frac{x_1}{x_2} = k_2\right) = 2\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2k_2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2k_2^2}. \qquad (I$$

При $\sigma_1 = \sigma_2$

$$W(k_1) = W(k_2) = W(k) = \frac{2k}{(1+k^2)^2}. \qquad (I$$

В (I)—(IV) величины отношений амплитуд k, k_1 и k_2 изменяются от 0 до ∞. Вы
рая всегда отношение интерферируемых лучей таким образом, чтобы $k \leqslant 1$, получ

$$W(k) = \frac{4k}{(1+k^2)^2}, \quad 0 \leqslant k \leqslant 1, \quad W(k) = 0, \quad 0 > k > 1.$$

(

ЛИТЕРАТУРА

1. С. В. Бородич, Расчет шумов в каналах радиорелейной линии с частотн
уплотнением и частотной модуляцией, Электросвязь, 1956, 1, 10.
2. Инженерно-технический справочник по электросвязи, VII, Радиорелейные лини
Связьиздат, 1956.

Поступило в редакцию
20 VI 1961

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ФАЗЫ ЛАМПОВОГО АВТОГЕНЕРАТОРА, НАХОДЯЩЕГОСЯ ПОД ВОЗДЕЙСТВИЕМ ЭДС МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ

А. Н. Шустерович

Может представить известный интерес определение энергетического спектра, ко
реляционной функции и дисперсии фазы колебаний одноконтурного автогенерато
томпсоновского типа, находящегося под действием малой внешней эдс постоянн
амплитуды, если расстройка этой эдс относительно частоты автогенератора пр
ставляет собой стационарный случайный процесс с нулевым средним значением.

Как известно, при воздействии на одноконтурный автогенератор томпсоновско
типа внешней эдс малой амплитуды фазу колебаний автогенератора можно опис
[2] укороченным нелинейным дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d\varphi}{dt} + \alpha_0 \sin\varphi = \Delta,$$

где $\alpha_0 = E_0\omega_0/2A_0$ — полоса синхронизации автогенератора; A_0, ω_0, φ — амплиту
частота и фаза автоколебаний; $\Delta = \omega_0 - p$ — расстройка; E_0, p — амплитуда и ч

стота внешней эдс; t — время. Вводя относительное время $\tau_1 = t\,\alpha_0$, выражение (1) можно привести к виду

$$\frac{d\varphi}{d\tau_1} + \sin\ \varphi = \Delta_1, \tag{2}$$

где $\Delta_1 = \Lambda/\alpha_0$ — относительная расстройка.

Ввиду сложности решения нелинейного уравнения (2) иногда его заменяют линейным уравнением

$$\frac{d\varphi}{d\tau_1} + \varphi = \Delta_1. \tag{3}$$

Подобная замена допустима, если $\Delta_1 \ll 1$. Линейная система, описываемая уравнением (3), имеет частотную характеристику

$$f(\Omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\Omega^2}}, \tag{4}$$

где Ω — относительная частота (частота, отнесенная к полосе синхронизации).

Пусть Δ_1 — малая по величине относительная расстройка — представляет собой непрерывный дифференцируемый стационарный случайный процесс с нулевым средним значением и энергетическим спектром $F(\Omega)$.

Тогда энергетический спектр фазы колебаний автогенератора $F_\varphi(\Omega)$ с учетом (4) можно представить в виде

$$F_\varphi(\Omega) = \frac{F(\Omega)}{1+\Omega^2} \tag{5}$$

и соответственно корреляционную функцию $B_\varphi(\tau)$ и дисперсию $B_\varphi(0)$ фазы в виде [1]

$$B_\varphi(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{F(\Omega)}{1+\Omega^2}\cos\Omega\tau\, d\Omega, \tag{6}$$

$$B_\varphi(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty \frac{F(\Omega)}{1+\Omega^2}\, d\Omega, \tag{7}$$

где τ — интервал относительного времени τ_1.

Отметим, что интегралы (6) и (7) всегда сходятся, даже если корреляционная функция расстройки

$$B(\tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty F(\Omega)\cos\Omega\tau\, d\Omega$$

и дисперсия расстройки

$$B(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^\infty F(\Omega)\, d\Omega$$

являются расходящимися интегралами.

Таким образом, для применения формул (5), (6) и (7) требование непрерывности процесса расстройки не является обязательным.

Выражения (6) и (7) не всегда легко интегрируются. В связи с этим может представить интерес определение условий, при которых в уравнении (3) можно пренебречь производной при заданной точности определения дисперсии фазы автогенератора. Соответствующее выражение при таком пренебрежении производной значительно упрощается:

$$B_\varphi(0) \simeq B(0). \tag{8}$$

Очевидно, что пренебрежение производной в (3) возможно, если расстройка Δ_1 изменяется достаточно медленно и медленно изменяется фаза автогенератора.

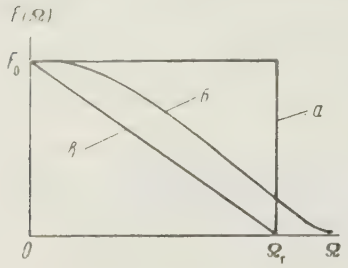
Для учета влияния производной в (3) введем «коэффициент медленности» M:

$$M = \frac{B_\varphi(0)}{B(0)},$$

где $B_\varphi(0)$ — дисперсия фазы автогенератора с учетом производной в (3); $B(0)$ — дисперсия расстройки Δ_1. В соответствии с (8) эта дисперсия равна дисперсии фазы автоге-

нератора, если в (3) пренебречь производной. Чем ближе коэффициент медленности к единице, тем меньше влияние производной в (3) на величину дисперсии фазы.

В таблице показаны значения коэффициента медленности для различных по форме энергетических спектров расстройки (рис. 1) в зависимости от граничной частоты спектра $\Omega_г$. Для спектра рис. 1, *б*, имеющего вид



$$F(\Omega) = \frac{F_0}{1 + a^2\Omega^2},$$

где $a = \text{const}$, под граничной частотой понимается эффективная ширина спектра

$$\Omega_г = \frac{\frac{1}{2\pi}\int_0^\infty F(\Omega)\, d\Omega}{F(0)}. \qquad (9)$$

Анализ таблицы позволяет сделать следующие выводы.

Наименьшие коэффициенты медленности имеет прямоугольный спектр, у которого спектральная плотность в пределах $\Omega = 0 - \Omega_г$ является постоянной.

С уменьшением спектральной плотности на высоких частотах спектра соответствующие коэффициенты медленности возрастают. Так, например, у треугольного спектра коэффициенты медленности больше, чем у спектра вида рис. 1, *б*.

Соответственно и у реальных спектров подобного типа коэффициенты медленности больше, чем у прямоугольного спектра.

Значения коэффициента медленности для различных энергетических спектров расстройки

Форма спектра	$\omega_г$					
	0,1	0,2	0,3	0,5	0,8	0,95
Прямоугольная (рис. 1, *а*)	1	0,990	0,977	0,935	0,835	0,8
Вида рис. 1, *б*	1	0,99	0,985	0,945	0,850	0,860
Треугольная (рис. 1, *в*)	1	1	1	0,98	0,99	0,89

В связи с этим коэффициенты медленности для прямоугольного спектра могут служить критерием для определения граничной частоты энергетического спектра медленного процесса, т. е. процесса, при котором в уравнении (3) можно пренебречь производной при заданной точности определения дисперсии фазы автогенератора.

Так, например, если точность определения дисперсии допускается порядка 5%, то из таблицы находим, что для этого случая

$$\Omega_г = 0{,}4 - 0{,}5.$$

Следует отметить, что, выбирая указанным методом $\Omega_г$ для реальных спектров, мы определяем ее с «запасом», так как в действительности граничная частота допустима более высокой.

Можно полагать также, что процессы, медленные в указанном выше смысле для уравнения (3), являются также медленными и для уравнения (2), если вероятность того, что $\Delta_1 > 1$, очень мала. При этом в (2) можно пренебречь производной при определении дисперсии фазы автогенератора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. Р. Левин, Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике. Изд. Советское радио, 1960.
2. Р. В. Хохлов, К теории захватывания автогенератора при малой амплитуде внешней силы, Докл. АН СССР, 1954, 43, 3, 41.

Поступило в редакцию
4 IV 1961

ВЫСОКОЧАСТОТНОЕ ВРАЩАЮЩЕЕСЯ ПОЛЕ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ РЕЗОНАТОРЕ

Л. И. Артеменков, И. В. Галкин

Как показано в работе [1], при помощи электромагнитных стоячих волн круговой поляризации можно осуществить эффективное удержание плазмы, находящейся в постоянном продольном магнитном поле.

Такого типа высокочастотное поле можно получить в цилиндрическом резонаторе на волне типа H_{111} при условиях возбуждения, указанных ниже.

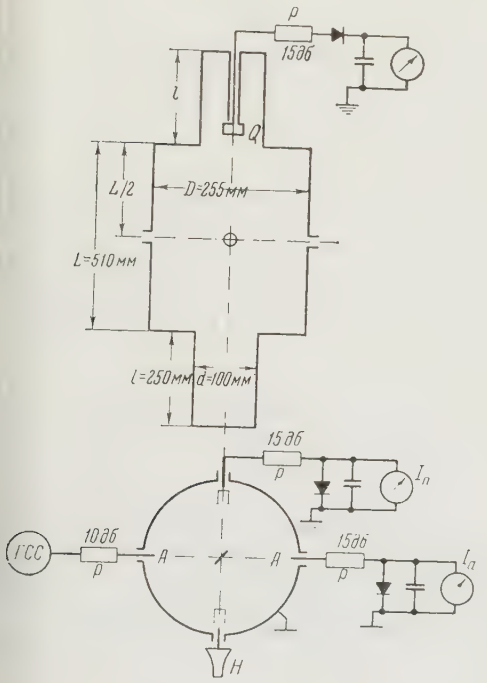


Рис. 1. Схема опыта:
A — A—направление, совпадающее с ориентацией штыря, связанного с генератором,— активная поляризация; *П — П* — направление пассивной поляризации, повернуто по отношению к активной поляризации на 90°; *P* — аттенюатор; *H* — согласованная нагрузка; *Q* — индикаторная петля

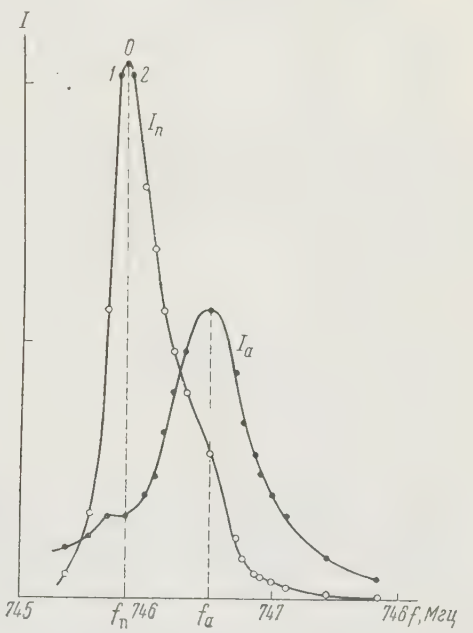


Рис. 2. Резонансные кривые для двух поляризаций в случае, когда резонансные частоты пассивной ($f_п$) и активной ($f_а$) поляризаций не совпадают ($f_п \neq f_а$)

Опыты проводились с медным цилиндрическим резонатором (рис. 1) при длине волны питающего генератора $\lambda_г \approx 40$ *см*. Индикация полей в резонаторе осуществлялась петлей и двумя штырями. Петля была помещена в запредельный отрезок круглого волновода на торце резонатора и могла поворачиваться вокруг оси последнего. Размеры петли ($\sim 10 \times 10$ *мм*) и расстояние ее от плоскости торца резонатора выбраны так, чтобы присутствие петли не искажало картины полей внутри резонатора. Штыри были ориентированы в направлении электрического поля активной и пассивной поляризаций. Глубина погружения их могла меняться.

Проведенные опыты показали, что при взаимном перекрытии резонансных кривых обеих поляризаций (рис. 2 и 3) * и точной настройке на частоту $f_п$ кривая зависимости тока детектора петли от угла поворота близка по форме к эллипсу (рис. 5, кривая *O*) независимо от расстройки относительно $f_а$. При этом оси эллипса ориентированы по выделенным направлениям ($A — A$; $П — П$) с точностью $\pm 10°$.

* На рис. 2, 3, 4 по оси ординат отложены токи детекторов штырей в относительных единицах, причем масштабы для $I_п$ и $I_а$ разные.

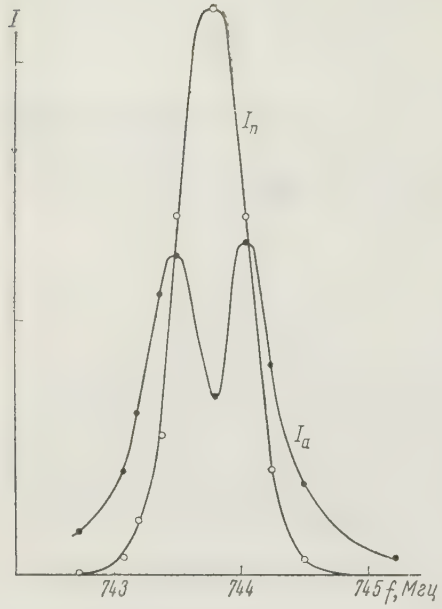


Рис. 3. Резонансные кривые для двух поляризаций в случае $f_п = f_а$

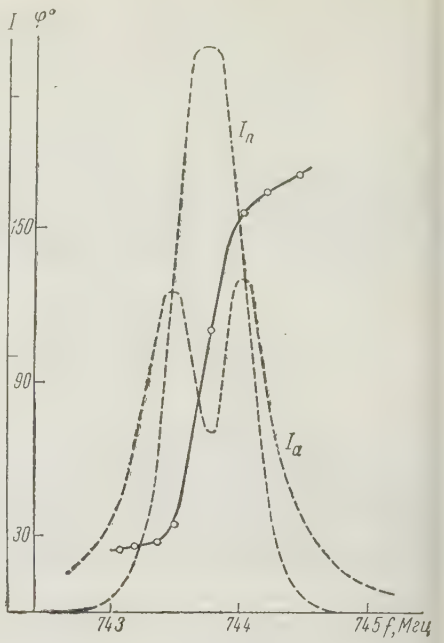


Рис. 4. Пример зависимости угла поворота осей эллипса от расстройки для случая $f_п = f_а$

Соотношение осей эллипса можно регулировать изменением добротностей по каждой из поляризаций и расстройкой относительно $f_а$ так, что по показаниям детектора связанного с петлей, можно получить эллипс, весьма близкий к кругу.

При отрицательной расстройке относительно $f_п$ (точка *1* на рис. 2) ось эллипса смещается по часовой стрелке, а при положительной расстройке (точка *2* на рис. 2) — против часовой стрелки. При этом соотношение полуосей различное для разных случаев.

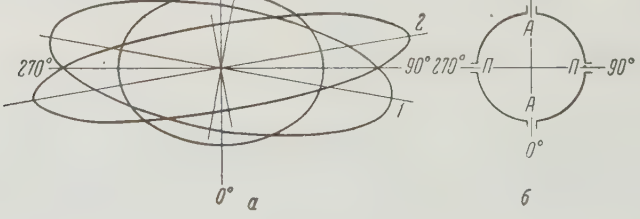


Рис. 5

а — зависимость тока детектора петли от угла поворота для точек *О*, *1*, *2* резонансной кривой пассивной поляризации (рис. 2); *б* — положение резонатора относительно полярных координат

Изменение угла поворота осей эллипса в зависимости от расстройки, показанное на рис. 4, при условии малости расстройки, а следовательно, при малом изменении интенсивности полей, вызывается изменением сдвига фаз между колебаниями активной и пассивной поляризаций.

Все сказанное выше позволяет сделать вывод, что при настройке генератора на резонансную частоту пассивной поляризации между составляющими поля типа H_{111}, соответствующими двум выделенным взаимно перпендикулярным направлениям возникает временной сдвиг фаз, равный $\pi/2$.

Этот результат качественно соответствует сдвигу фаз $\pi/2$ между первичным и вторичным токами в индуктивно связанных контурах с сосредоточенными параметрами при настройке вторичного контура на частоту генератора.

ЛИТЕРАТУРА

1. Р. З. Сагдеев, Сб. физика плазмы и проблема управляемых термоядерных реакций, под ред. акад. М. А. Леонтовича, III, стр. 346, Изд. АН СССР, 1958.

Поступило в редакцию
3 III 1961

ИЗМЕРЕНИЕ МОЩНОСТИ АМПЛИТУДНЫХ ФЛУКТУАЦИЙ ОТРАЖАТЕЛЬНОГО КЛИСТРОНА

С. А. Корнилов, В. М. Лавров

Наиболее простым способом измерения амплитудных флуктуаций СВЧ-генераторов является прямое детектирование [1, 2]. При ограниченной мощности исследуемых колебаний в качестве детектора в настоящее время может быть использован только полупроводниковый диод. Применение этого диода, однако, затруднено тем, что в низкочастотной области сильно возрастают его избыточные шумы, спектральная плотность мощности которых изменяется по закону $1/f$.

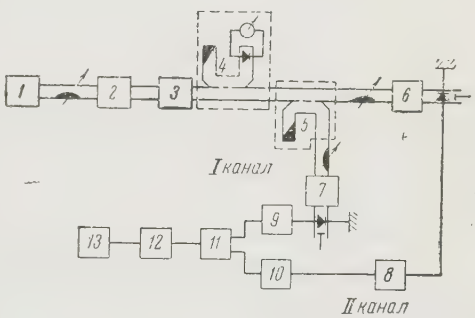


Рис. 1. Блок-схема измерительной установки:

1 — исследуемый генератор; *2* — ферритовый модулятор; *3*, *6*, *7* — ферритовые вентили; *4* — индикатор мощности; *5* — согласованный щелевой мост; *9*, *10* — широкополосные усилители каналов (5 —200 *кгц*); *8* — фазовращатель для балансировки каналов по фазе; *11* — коммутирующее устройство; *12* — перестраиваемый фильтр для анализа спектра флуктуаций; *13* — измеритель мощности флуктуаций (квадратичный детектор с интегрирующей цепочкой и стрелочным индикатором)

Выделение продетектированных шумов генератора из собственных шумов детектора может быть выполнено посредством когерентных (балансных) измерений, применение которых к исследованию шумов СВЧ-генераторов описано в работах [3] и [4]. В частности, Никоновым [4] опубликованы результаты измерений амплитудных флуктуаций отражательных клистронов диапазона волн 3 *см* в пределах от 100 *кгц* до 30 *Мгц*. В настоящем сообщении изложены предварительные результаты измерений мощности амплитудных флуктуаций отражательного клистрона в диапазоне от 5 до 200 *кгц*. Поскольку на этих частотах избыточные шумы кристаллов весьма значительны, измерения потребовали создания когерентной измерительной системы, способной регистрировать мощность продетектированных амплитудных флуктуаций, которая на 20 *дб* ниже мощности собственных шумов детекторов*.

Как и в [4], измерения проводились в диапазоне волн 3 *см*.

Блок-схема измерительной установки представлена на рис. 1. Исследуемые СВЧ-колебания делятся в мостовом устройстве на два канала. После детектирования флуктуации усиливаются и подаются на коммутирующее устройство, образующее на выходе сумму или разность напряжений каналов.

Если исследуемый генератор не модулирован шумами, то синфазное или противофазное включение каналов даст одинаковые показания выходного измерителя мощности, так как собственные шумы каналов некогерентны. В случае амплитудной модуляции генератора в обоих каналах в результате детектирования появится когерентная составляющая, которая обусловит разницу в показаниях измерителя мощности при суммировании и вычитании напряжений каналов. Для предотвращения ошибок, обусловленных паразитной высокочастотной связью между каналами, возникающей из-за шумовой модуляции волн, отраженных от детекторов, в детекторные плечи моста включены ферритовые вентили. Полная величина развязки между детекторами, включая развязку между плечами моста, была в описываемой установке не менее 50 *дб*.

* Методические вопросы двухканальных измерений разрабатывались совместно с С. С. Каратецким и Е. И. Хацкевичем.

Анализ спектра флуктуаций осуществлялся после коммутации сигнала, что об легчало требования к идентичности характеристик усилителей каналов, имевших широкую полосу, достаточную для пропускания всего исследуемого диапазона флук туаций.

Полоса пропускания фильтра составляла 300 *гц* на частотах от 5 до 20 *кгц* и 2 *кгц* на частотах от 20 до 200 *кгц*.

Постоянная времени интегрирующей цепи измерителя мощности выбиралась из условия однопроцентной ошибки измерения мощности шума, обусловленной естест венными флуктуациями.

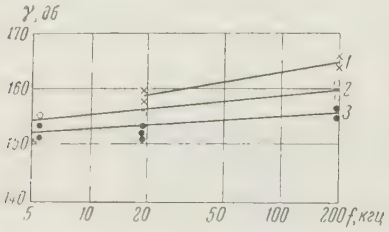


Рис. 2. Зависимость отношения мощности сигнала к спектральной плотности мощности амплитудных флуктуаций от частоты:

1 — центр зоны колебаний; *2* — точка половинной мощности на низкочастотном краю зоны колебаний; *3* — точка половинной мощности на высокочастотном краю зоны колебаний

Для балансировки установки (т. е. для соответствующего подбора амплитуд и фаз на выходе каналов в узкой полосе фильтра) использовалась внешняя модуляция СВЧ-колебаний при помощи ферритового модулятора.

Калибровка установки проводилась сравнением действия низкочастотного шума на входе усилителей с действием эквивалентного по мощности синусоидального напряжения, с последующим пересчетом на высокую частоту по измеренным в условиях эксперимента потерям преобразования.

На рис. 2 приведены результаты измерений амплитудных флуктуаций отражательного клистрона в центре зоны колебаний и в точках половинной мощности.

В центре зоны уровень шумовой модуляции ниже чем по краям, причем особенно высокие шумы наблюдаются при расстройке в высокочастотную сторону. С уменьшением частоты анализа уменьшается относительный уровень когерентных составляющих в каналах, так как спектральная плотность мощности амплитудных флуктуаций отражательного клистрона изменяется с частотой значительно медленнее закона $1/f$, которому следует спектр шумов детекторов. Так, в точке 5 *кгц* чувствительность установки была уже недостаточной для измерения мощности флуктуаций в центре зоны колебаний.

Полученные на частоте 200 *кгц* результаты согласуются с данными Никонова [4].

Особого внимания заслуживает вопрос о частотной зависимости спектральной плотности исследованных амплитудных флуктуаций. Наши данные противоречат приведенным в статье Малахова [5] цифрам, согласно которым низкочастотные амплитудные флуктуации отражательного клистрона имеют спектр мощности вида $1/f$.

Если бы это было так, то затруднений в измерении низкочастотных амплитудных флуктуаций не возникало бы: отношение мощности продетектированных шумов клистрона к мощности собственных шумов детектора оставалось бы постоянным. Мы склонны считать, что полученная нами частотная зависимость амплитудных шумов клистрона преувеличена из-за неточности калибровки установки и что в действительности в исследованном диапазоне амплитудные флуктуации имеют почти постоянный спектр. Измерения, проведенные Эйтчисоном [6] по супергетеродинной методике, показали именно такой результат.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Mueller, IRE Trans., 1954, **ED-1**, 4, 42.
2. W. Gottshalk, IRE Trans., 1954, **ED-1**, 4, 91.
3. N. Smith, Proc. I. E. E., 1958, **B105**, Suppl. N 11, 800.
4. В. Н. Никонов, Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1959, **2**, 6, 915.
5. А. Н. Малахов, Изв. вузов МВО СССР (Радиофизика), 1960, **3**, 6, 1001.
6. C. S. Aitchison, Proc. I. E. E., 1958, **B105**, Suppl. N 12, 944.

Поступило в редакцию
10 V 1961

УСЛОВИЕ ПОЛУЧЕНИЯ МИНИМАЛЬНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ЭЛЕКТРОННЫХ ПОТОКОВ, ФОКУСИРУЕМЫХ ОДНОРОДНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ, В СИСТЕМАХ С ЧАСТИЧНО ЭКРАНИРОВАННЫМ КАТОДОМ

С. И. Молоковский

Вопрос об уменьшении пульсаций электронного потока путем подбора величины потока магнитного поля через поверхность катода рассматривался Менделем [1]. Он показал, что пульсации потока оказываются минимальными при условии

$$K = 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega_L^2}, \tag{1}$$

где $K = (N_1/N_2)^2$ — параметр экранировки катода, равный квадрату отношения потока магнитного поля через поверхность катода к потоку магнитного поля на входе в область фокусирующего поля; $\omega_p = \sqrt{\eta\rho/\varepsilon}$ — плазменная частота; $\omega_L = \frac{1}{2}\eta B$ — ларморова частота.

Соотношение (1) получено в предположении, что радиальные скорости электронов на входе в область однородного поля равны нулю. Так как в реальных условиях одним из главных источников пульсаций электронного потока являются ненулевые радиальные скорости электронов на входе в зону фокусировки, то интересно найти условие получения минимальных пульсаций с учетом начальных радиальных скоростей электронов. Оно может быть определено путем нахождения минимума амплитуды пульсаций в зависимости от величин K.

Используя результаты [1], амплитуду пульсаций можно представить в виде

$$\delta_m = \sqrt{\frac{\frac{1}{r_0^2}\left(\frac{dr}{dt}\right)_0^2\left[\omega_L^2(1+3K)+\frac{\omega_p^2}{2}\right]+\left[\omega_L^2(1-K)-\frac{\omega_p^2}{2}\right]^2}{\left[\omega_L^2(1+3K)+\frac{\omega_p^2}{2}\right]^2}}, \tag{2}$$

где r_0 — начальный радиус электронного потока; $(dr/dt)_0$ — начальная радиальная скорость периферийного электрона.

Отсюда обычным способом нахождения экстремума функции определяем следующее условие минимума амплитуды пульсаций:

$$K = 1 - \frac{\omega_p^2}{2\omega_L^2} + \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)_0^2\frac{1}{\omega_L^2 r_0^2}}{1+3\,\frac{\left[1-K-\frac{\omega_p^2}{2\omega_L^2}\right]}{\left[1+3K+\frac{\omega_p^2}{2\omega_L^2}\right]}}. \tag{3}$$

При нулевых начальных радиальных скоростях это условие, как нетрудно видеть, переходит в условие Менделя (1).

Выражение (3), так же как и исходное выражение (2), строго справедливо в рамках линейной теории пульсаций электронного потока [1]. Однако численные расчеты движения периферийного электрона, проделанные для случая больших возмущений с использованием соотношений нелинейной теории [2], дают оптимальные значения K, близкие к значению, определяемому из (3).

ЛИТЕРАТУРА

J. T. Mendel, Proc. I. R. E., 1955, 43, 3, 327.
C. C. Wang, Proc. I. R. E., 1950, 38, 2, 135.

Поступило в редакцию
20 III 1961

ПИСЬМА В РЕДАКЦИЮ

НАКОПЛЕНИЕ ШУМОВ В НАКОПИТЕЛЕ С ЗАДЕРЖАННОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ

При реализации оптимальной фильтрации периодической последовательности импульсных сигналов в шуме практически применяют накопители с задержанной обратной связью (см. [1], рис. 1, *а*), в состав которых входят линейный фильтр с передаточной функцией $K(\omega)$, цепь обратной связи с коэффициентом передачи $m < 1$, линия задержки на период повторения T импульсного сигнала и суммирующее устройство. В предположении, что все элементы накопителя линейны и, кроме фильтра, имеют равномерные амплитудно-частотные характеристики в достаточно широкой полосе частот, в [1] рассмотрено накопление белых нормальных шумов в таких накопителях. В этом случае с использованием частотной характеристики накопителя с задержанной обратной связью приближенно вычислена мощность шумов на выходе накопителя в установившемся режиме.

Ниже изложен другой подход, позволяющий рассмотреть накопление шумов с неравномерным спектром и вычислить мощность шумов на выходе накопителя с задержанной обратной связью после любого числа циклов накопления.

Рассмотрим накопление стационарного шума $\nu_0(t)$ со спектральной плотностью мощности $S_0(\omega)$ в накопителе с задержанной обратной связью, причем $S_0(\omega)$ такова, что значения шума через время T можно считать практически независимыми. Обозначим через $\nu_n(t)$ шум $\nu_0(t)$, прошедший n раз через фильтр накопителя. Тогда спектральная плотность мощности случайного процесса $\nu_n(t)$ будет равна [2]

$$S_n(\omega) = S_0(\omega) \mid K(\omega) \mid^{2n}. \qquad (1)$$

Из схемы накопителя следует, что шум на его выходе после N периодов повторения времени T выражается через шум на входе по формуле

$$\nu(t) = \sum_{n=0}^{N} m^n \nu_{n+1}(t - nT) \qquad (2)$$

и мощность его равна

$$\sigma^2(N) = \sum_{n=0}^{N} m^{2n} \sigma_{n+1}^2, \qquad (3)$$

где σ_{n+1}^2 — мощность $\nu_{n+1}(t)$ — вычисляется по спектральной плотности (1):

$$\sigma_{n+1}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty S_{n+1}(\omega)\, d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty S_0(\omega) \mid K(\omega) \mid^{2n+2} d\omega.$$

Подставляя это выражение в (3) и меняя порядок суммирования и интегрирования, получим окончательно выражение для мощности шума на выходе накопителя с задержанной обратной связью после N периодов повторения при подаче на его вход стационарного шума со спектральной плотностью мощности $S_0(\omega)$:

$$\sigma^2(N) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{S_0(\omega) \mid K(\omega) \mid^2}{1 - m^2 \mid K(\omega) \mid^2} (1 - m^{2N+2} \mid K(\omega) \mid^{2N+2})\, d\omega. \qquad (4)$$

В частности, в установившемся режиме мощность шума на выходе накопителя получается из (4) при $N \to \infty$:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{S_0(\omega) \mid K(\omega) \mid^2}{1 - m^2 \mid K(\omega) \mid^2} d\omega. \qquad (5)$$

Значение σ^2 получено приближенно в [1] для белого шума при излишнем предположении о его нормальности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю. С. Лезин, Накопление шумов в устройствах с задержанной связью, Радиотехника и электроника, 1961, **6**, 2, 187.
2. Б. Р. Левин, Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, Изд. Советское радио, 1960.

В. Г. Кононов

Поступило в редакцию
20 VI 1961

CONTENTS

Vorontsov Yu. I., Rzhevkin K. S. Tunnel diodes in amplifiers (review) 1779
Radchenko A. N., Mironchikov E. T. Multi-time methods of correcting single and multiple closely placed errors in group codes 1805
Akhmanov S. A., Khokhlov R. V. Conversion of random signals in nonlinear lines 1813
Litvinenko O. N. Synthesis of lines with different input resistances given as fraction-rational frequency function 1825
Perepeliatnik P. A. Biharmonic oscillations in a generator with delay and with asynchronous frequency relation 1832
Rutkas A. G. Chain synthesis of reactive network 1839
Shifrin Ya. S. Correlation characteristics of the linear antenna field 1846
Khaskind M. D. Wave diffraction on a slit and a tape orientated perpendicular to an impedance plane 1859
Lubimov L. A., Veselov G. I., Bey N. A. Dielectric waveguide of elliptical section 1871
Shevchik V. N., Sinitsin N. I. Influence of electron velocities spread on backward-wave tube operation 1881
Ivanova V. D., Mikhalevskiy V. S. Plasma control of the frequency of TWT-type oscillator 1888
Birger L. A. Pass-width and noise figure of resonance amplifier on tunnel diode 1894
Trigubenko V. A., Tsarev B. M. Thermoelectron properties of hexaborides and other compositions of inculcation structures-type 1900
Rezgol I. A. Optimum points on the volt-ampere characteristic of a thermoelectron energy converter 1906
Yablonskiy F. M. Current control of discharge ignition in dekatron 1914
Belova N. A., Kovalev A. N. Some special features of the narrow germanium $p-n$ junctions volt-ampere characteristic 1921
Lototskiy L. S. Comparison of static and dynamic characteristics of germanium diodes at reverse bias 1927

BRIEF REPORTS

Prosin A. V. Non-linear distortion at two-beam radiowave propagation 1932
Shusterovich A. N. On one case of phase statistic characteristics determination in a tube generator influenced by the small amplitude of emf 1936
Arteminkov L. I., Galkin I. V. Microwave rotating field in a cylinder cavity 1939
Kornilov S. A., Lavrov V. M. Measurement of the amplitude fluctuations power of a reflex klystron 1941
Molokovskiy S.I. Condition of obtaining minimum ripples of electron flows focused by a uniform magnetic field in systems with partially screened sathode . . 1943

LETTERS TO THE EDITOR

Kononov V. G. Noise storage in an integrator with delayed backward coupling 1944

Цена 1 руб 38 коп.

ОТКРЫТА ПОДПИСКА

на журналы Издательства Академии наук СССР на 1962 год

Название журнала	Кол-во номеров в год	Подписная цена	
		Годовая	Полугодовая
Общеакадемические журналы			
Вестник Академии наук СССР	12	9—60	4—80
Доклады Академии наук СССР (без папок)	36	51—84	25—92
Доклады Академии наук СССР (с 6-ю коленкоровыми папками с тиснением)	36	54—24	27—12
Природа	12	8—40	4—20
Физико-математические науки			
Акустический журнал	4	4—80	2—40
Астрономический журнал	6	9—90	4—95
Геомагнетизм и аэрономия	6	9—00	4—50
Журнал вычислительной математики и математической физики	6	9—00	4—50
Журнал технической физики	12	12—60	6—30
Журнал экспериментальной и теоретической физики	12	28—80	14—40
Известия Академии наук СССР:			
серия геофизическая	12	18—00	9—00
серия математическая	6	9—00	4—50
серия физическая	12	14—40	7—20
Кристаллография	6	9—00	4—50
Математический сборник	12	14—40	7—20
Оптика и спектроскопия	12	16—20	8—10
Приборы и техника эксперимента	6	9—78	4—89
Теория вероятностей и ее применения	4	4—52	2—26
Физика твердого тела	12	30—00	15—00
Химические науки			
Высокомолекулярные соединения	12	15—00	7—50
Геохимия	12	9—00	4—50
Журнал аналитической химии	6	7—20	3—60
Журнал научной и прикладной фотографии и кинематографии	6	4—50	2—25
Журнал неорганической химии	12	27—00	13—50
Журнал общей химии	12	33—00	16—50
Журнал прикладной химии	12	22—56	11—28
Журнал физической химии	12	27—00	13—50
Известия Академии наук СССР. Отделение химических наук	12	18—00	9—00
Коллоидный журнал	6	7—20	3—60
Нефтехимия	6	7—50	3—75
Радиохимия	6	7—20	3—60
Успехи химии	21	9—60	4—80

Название журнала	Кол-во номеров в год	Подписная цена	
		Годовая	Полугодовая
Геолого-географические науки			
Геология рудных месторождений	6	7—20	3—
Записки Всесоюзного минералогического общества	6	7—20	3—
Известия Академии наук СССР			
серия географическая	6	9—00	4—
серия геологическая	12	14—40	7—
Известия Всесоюзного географического общества	6	5—40	2—
Океанология	6	9—00	4—
Биологические науки			
Биофизика	6	7—20	3—
Биохимия	6	10—80	5—
Ботанический журнал	12	18—00	9—
Вопросы ихтиологии	4	6—00	3—
Журнал высшей нервной деятельности им. И. П. Павлова	6	9—00	4—
Журнал общей биологии	6	4—50	2—
Зоологический журнал	12	18—00	9—
Известия Академии наук СССР:			
серия биологическая	6	9—00	4—
Микробиология	6	9—00	4—
Палеонтологический журнал	4	6—00	3—
Почвоведение	12	14—40	7—
Радиобиология	6	7—50	3—
Успехи современной биологии	6	4—80	2—
Физиологический журнал СССР им. И. М. Сеченова	12	14—40	7—
Физиология растений	6	7—20	3—
Цитология	6	7—20	3—
Энтомологичееkое обозрение	4	9—00	4—
Технические науки			
Автоматика и телемеханика	12	13—56	6—
Известия Академии наук СССР:			
Отделение технических наук:			
металлургия и топливо	6	7—50	3—
механика и машиностроение	6	7—50	3—
энергетика и автоматика	6	7—50	3—
Инженерный журнал	4	6—00	3—
Прикладная математика и механика	6	10—80	5—
Радиотехника и электроника	12	16—50	8—

Подписка принимается повсеместно в пунктах подписки «Союзпечати», почтамтах, конторах и отделениях связи, общественными уполномоченными на заводах и фабриках, в научно-исследовательских институтах, учебных заведениях и организациях, а также отделениями и магазинами «Академкниги» и конторой «Академкнига» по адресу:

МОСКВА, ЦЕНТР, Б. ЧЕРКАССКИЙ ПЕР., 2/10

1961 NRV